TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

Femte Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.

1887.

FØRSTE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa E. Jespersens Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram. [illegible] 16, A, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og **H. G. Zeuthen.**

FEMTE RÆKKE.

FEMTE AARGANG.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1887.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

FEMTE RÆKKE.

FEMTE AARGANG.

1887.

Indhold.

Løste Opgaver.

Opgaver til Løsning.

Opgaver til Brug ved Undervisningen.

Examensopgaver.

Literaturanmeldelser.

Oversigt over de numererede Opgaver i tidligere Aargange, som ikke ere løste:

TIDSSKRIFT
FOR
MATHEMATIK.

BILLEDDANNELSE I KUGLESPEJLE OG LINSER[1]).

(AF A. MEYER).

Den efterfølgende Fremstilling, der er bestemt til Skolebrug, adskiller sig fra de mig bekjendte nærmest derved, at det ved at regne Vinkler og Linier med Fortegn, samt ved Benyttelse af harmoniske og anharmoniske Forhold har været muligt at fremstille alle Tilfælde af Lysets Tilbagekastning fra en Kugleflade under ét og ligeledes alle Tilfælde af Lysets Brydning i en Linse under ét.

Billeddannelse i Kuglespejle.

1. Et Kuglespejl er et Spejl, der har Form af en Kuglekalot. Spejlets Axe er Linien gjennem Centrum og Kuglekalottens Midtpunkt. Spejlets Aabning er Toppunktsvinklen i den Kegle, der har Toppunkt i Kuglens Centrum og hvis Frembringer glider paa den Cirkelperiferi, som begrænser Kuglekalotten. Lad S være et Straalepunkt i Axen og SA en indfaldende Straale (Fig. 1). Da den tilbagekastede Straale ligger i Indfaldsplanen, maa den skjære Axen i et Punkt B. Vi ville nu vise, at, hvis Spejlets Aabning er lille, alle de tilbagekastede Straaler med Tilnærmelse skjære Axen i samme Punkt B. Trækkes Tangenten AT i Indfaldsplanen, da ere B og S harmonisk forbundne med O og T (thi AO halverer $\angle\ SAB$). Alle tilbagekastede Straaler, der hidrøre fra indfaldende Straaler, som danne samme Vinkel med SA, ville skjære Axen nøjagtig i samme Punkt B, thi for alle disse Straaler vil

[1]) Hertil en Figurtavle.

Punktet T blive det samme. Betragtes nu en Straalekegle med mindre Toppunktsvinkel, vil det til denne svarende Punkt T ligge nærmere ved Spejlet, det tilsvarende Billedpunkt B altsaa nærmere ved Centrum. Billedet af Punktet B vil altsaa blive en Linie i Axen. Hvis Spejlets Aabning er meget lille, kunne alle Punkterne T betragtes som faldende i M. I dette Tilfælde kan man altsaa sige, at alle de tilbagekastede Straaler med Tilnærmelse ville forenes i det Punkt af Axen, som er harmonisk forbunden med Straalepunktet med Hensyn til Centrum og Midtpunkt. Heraf følger, at man, naar Straalepunktets Beliggenhed er opgiven, let kan angive Billedpunktets Beliggenhed (og konstruere det).

Vi ville foreløbig gjennemføre Diskussionen for et konkavt Spejls Vedkommende. Hvis Straalepunktet ligger uendelig fjernt paa Axen, ligger Billedpunktet midt mellem O og M (Brændpunktet). Naar Straalepunktet gaar fra det uendelig fjerne til O, gaar Billedet fra Brændpunktet til O; naar Straalepunktet gaar fra O til Brændpunktet, gaar Billedpunktet fra O til det uendelig fjerne. Naar Straalepunktet gaar fra Brændpunktet til Spejlet, gaar Billedpunktet fra det uendelig fjerne (paa den modsatte Side af Spejlet) til Spejlet (er virtuelt). Hvis Straalepunktet ligger bagved Spejlet (ɔ: hvis Straalepunktet er virtuelt) ligger Billedpunktet mellem Brændpunktet og Spejlet. Vi ville nu opstille en Formel til Beregning af Billedets Plads, naar Straalepunktet er givet eller omvendt. Vi ville da som positiv Retning paa Axen vælge Retningen mod Lyset; dernæst ville vi ved a, f og r betegne Straalepunktets, Billedets og Centrets Abscisse, naar Midtpunktet er Begyndelsespunkt. Man har da, efter en bekjendt Sætning:

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f}$$

eller

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f},$$

naar $p = \frac{r}{2}$ (Brændvidden).

Hvis Straalepunktet ikke ligger i Axen, vil Billedpunktet ligge paa Linien gjennem Straalepunktet og Centrum (Biaxen) og være

det Punkt af denne Linie, der er harmonisk forbundet med Straalepunktet med Hensyn til Centrum og Skjæringspunktet mellem Biaxen og Spejlet.

2. Konstruktion af Billedet.

Da en Linie parallel med Axen efter Tilbagekastningen gaar gjennem Brændpunktet, konstrueres Billedet som Skjæringspunkt mellem Biaxen og den Linie, hvori en saadan Straale kastes tilbage.

Denne Konstruktion kan dog ikke benyttes, naar Straalepunktet falder i Axen. I dette Tilfælde konstrueres Billedet som Skjæringspunkt mellem Axen og en vilkaarlig tilbagekastet Straale.

3. Straalepunkter beliggende i en Plan vinkelret paa Axen have deres Billeder i en Plan vinkelret paa Axen.

For at bevise denne Sætning ville vi bevise, at Straalepunktets og Billedpunktets Projektioner paa Hovedaxen ere harmonisk forbundne med Hensyn til Spejlets Midtpunkt og Centrum. Vi tænke os her Billedet konstrueret som Skjæringspunkt mellem SO og den Straale, hvori SM kastes tilbage (Fig. 2). Man ser da ved ligedannede Trekanter, at man har: $\frac{MB_1}{MS_1} = \frac{BB_1}{S_1S} = \frac{B_1O}{OS_1}$, hvilket skulde bevises. Deraf følger, at naar forskjellige Straalepunkter have samme Projektion paa Axen (ɔ: ligge i samme Plan vinkelret paa Axen), maa ogsaa deres Billedpunkter have samme Projektion paa Axen (ɔ: ligge i samme Plan vinkelret paa Axen). Saalænge Gjenstanden er plan og vinkelret paa Hovedaxen, er Billedet altsaa ogsaa plant og vinkelret paa Hovedaxen. Tillige vil Billede og Gjenstand være ligedannede og ligedan beliggende med Spejlets Centrum som Fællespunkt, hvoraf atter følger, at Billedet er opretstaaende eller omvendt, eftersom Billede og Gjenstand ligge paa samme Side af Centrum eller ikke. Forstørrelsen er Forholdet mellem Billedets og Gjenstandens lineære Udstrækninger og altsaa lig Forholdet mellem deres Afstande fra Spejlets Centrum eller, hvad der ifølge det foregaaende bliver det samme, mellem deres Afstande fra Spejlets Midtpunkt. Derved afgjøres altid let, om Billedet er for-

større eller formindsket. Vil man have en Formel, faar man med let forstaaelige Betegnelser:

$$m = \frac{f}{a} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{a}{p} - 1}.$$

Ex. 1. Gjenstanden antages beliggende mellem Centrum og Brændpunkt. Billedet ligger udenfor Centrum og er altsaa reelt. Det ligger længere borte fra Spejlets Midtpunkt end Gjenstanden og er altsaa forstørret. Det ligger paa modsat Side af Centrum og er altsaa omvendt.

Ex. 2. Gjenstanden ligger mellem Brændpunktet og Spejlet. Billedet ligger bagved Spejlet og er altsaa virtuelt; det ligger længere borte fra Centrum end Gjenstanden, er altsaa forstørret. Det ligger paa samme Side af Centrum som Gjenstanden, er altsaa opretstaaende.

4. Konvexe Kuglespejle.

Det foregaaende kan umiddelbart anvendes paa konvexe Kuglespejle. Billedet af en Gjenstand foran Spejlet ligger altid bagved Spejlet, mellem Spejlet og Brændpunktet. Det er altsaa virtuelt, formindsket og opretstaaende.

5. Da Billedet kun udsender Lys indenfor en Keglefiade med Billedet som Toppunkt og med Spejlets Omkreds som Ledelinie, maa man holde Øjet indenfor denne Keglefiade for at se Billedet.

II. Billeddannelse i Linser.

1. Lysets Brydning gjennem en enkelt Kuglefiade. (Fig. 3).

Lad S være et Straalepunkt, hvis Straaler træffe et af en Kuglefiade med Centrum i O begrænset Legeme. Vi ville da vise, at — under visse Betingelser, som nærmere skulle angives i det følgende — de brudte Straaler med Tilnærmelse ville forenes i ét Punkt. Straalen SO (Axestraalen) gaar ubrudt igjennem. En vilkaarlig anden Straale SA vil efter Brydningen skjære Axen i et Punkt B (efter den første Brydningslov). Vi tegne dernæst Tangenten AT til Kuglefladen i Indfaldsplanen. De positive Ret-

ninger paa Linierne AO, AT, AS og AB ville vi betegne ved (O), (T), (S), (B). De to sidste vælges i den Retning, i hvilken Lyset forplanter sig; de to første vælges saaledes, at $(TO) = + \frac{\pi}{2}$. Naar Retningerne paa den indfaldende og den brudte Straale ere valgte positive med Lyset, haves i alle Tilfælde:

$$\frac{\sin(OS)}{\sin(OB)} = n, \tag{1}$$

idet n betegner Brydningsforholdet.

Kalde vi endvidere Dobbeltforholdet mellem Punkterne O, T, S og B: $(OTSB)$, haves [1])

$$(OTSB) = \frac{\sin(OS)}{\sin(OB)} : \frac{\sin(TS)}{\sin(TB)};$$

men da

$$(TS) = (TO) + (OS) = \frac{\pi}{2} + (OS),$$

$$(TB) = (TO) + (OB) = + \frac{\pi}{2} + (OB)$$

gaar denne Ligning over til:

$$(OTSB) = n : \frac{\cos(OS)}{\cos(OB)}.$$

Forudsættes nu, at Indfaldsvinklen (OS) og altsaa Brydningsvinklen (OB) er meget lille, kan man med Tilnærmelse sætte $\cos(OS)$ og $\cos(OB) = 1$. Forudsættes endvidere, at Vinkel AOT er meget lille, vil Punktet T falde nær ved Punktet M, i hvilket Axestraalen skjærer Kuglefladen. Under disse Forudsætninger haves altsaa:

$$(OMSB) = n.$$

Da Punkterne O, M og S ere faste og Dobbeltforholdet har en konstant Værdi, maa det fjerde Punkt B ogsaa være fast. For at opstille en Ligning til Beregning af Punktet B's Plads, indføres Betegnelserne:

$SM = a$, $MO = r$, $MB = f$. [2]) Man har da:

$$\frac{OS}{OB} : \frac{MS}{MB} = n \text{ eller } \frac{OM + MS}{OM + MB} : \frac{MS}{MB} = n \text{ ɔ:}$$

---

[1]) Betegnelsen svarer til $(OTBS)$ i Jul. Petersen Anal. Geom. II. — Red.

[2]) Den positive Retning er med Lyset.

$$\frac{-r-a}{-r+f} : \frac{-a}{f} = n,$$

hvoraf:
$$\frac{1}{a} + \frac{n}{f} = \frac{n-1}{r}, \tag{1}$$

$$\text{eller: } \frac{1}{SM} + \frac{n}{MB} = \frac{n-1}{MO}. \tag{2}$$

a er ifølge det foregaaende positiv, hvis Straalepunktet ligger paa den Side af Kuglefladen, hvorfra Lyset kommer (er reelt); f er positiv, hvis Billedpunktet ligger paa den Side af Kuglefladen, til hvilken Lyset gaar (er reelt); r er positiv, hvis Kuglefladen vender sin Konvexitet mod Lyset.

2. Lysets Brydning i en Linse. (Fig. 4).

En Linse er et gjennemsigtigt Legeme, der er begrænset af 2 Kuglflader. Paa Figuren er tegnet en særegen Form af Linser (en dobbeltkonvex); men den efterfølgende Udvikling gjælder for enhver Form.

Liniens Hovedaxe er Linien gjennem de 2 Centre. Vi ville bestemme Billedet af et Straalepunkt, S, i Hovedaxen. De fra dette Straalepunkt udgaaende Straaler ville, hvis det forudsættes, at man kun betragter saadanne Straaler, der træffe Linien i Nærheden af Punktet M_1 under smaa Indfaldsvinkler, efter Brydningen i den første Kugleflade konvergere mod et Punkt B_1 i Hovedaxen, der nu kan betragtes som Straalepunkt i Forhold til den anden Kugleflade. Efter Brydningen i den anden Kugleflade ville Straalerne atter konvergere mod Billedet af B_1 i den anden Kugleflade. Dette Billedpunkt, som ligger paa Hovedaxen, ville vi kalde B. Vi have altsaa vist, at Straalepunktet S paa Hovedaxen har et Billede i Linsen, B, som ogsaa ligger paa Hovedaxen.

For at bestemme dettes Plads ville vi benytte følgende Betegnelser (den positive Retning paa Hovedaxen er med Lyset, til højre paa Figuren).

$SM_1 = a$ (positiv, naar Straalepunktet ligger foran Linsen),
$M_1M_2 = d$ (Linsens Tykkelse, altid positiv),
$M_1B_1 = f_1$
$M_2B = f$ (positiv, naar det endelige Billede, B, ligger bagved Linsen).

$M_1O_1 = r_1$; $O_2M_2 = r_2$. Begge disse Kugleradier blive positive, naar Kuglefladen vender Konvexiteten udad. Man har da (efter Ligning (2) i foregaaende Afsnit):

$$\frac{1}{SM_1} + \frac{n}{M_1B_1} = \frac{n-1}{M_1O_1},$$

eller:

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{f_1} = \frac{n-1}{r_1}. \tag{1}$$

Dernæst:

$$\frac{1}{B_1M_2} + \frac{\frac{1}{n}}{M_2B} = \frac{\frac{1}{n}-1}{M_2O_2}.$$

Denne Ligning følger ogsaa af Ligning (2) i foregaaende Afsnit, naar man erindrer, at Brydningsforholdet fra Linsen til Luften er $\frac{1}{n}$. Med de valgte Betegnelser kan den skrives saaledes:

$$\frac{1}{-f_1+d} + \frac{\frac{1}{n}}{f} = \frac{\frac{1}{n}-1}{-r_2}$$

(idet $B_1M_2 = B_1M_1 + M_1M_2 = -f_1 + d$)

eller:

$$\frac{n}{d-f_1} + \frac{1}{f} = \frac{n-1}{r_2}. \tag{2}$$

Af Ligning (1) haves:

$$\frac{f_1}{n} = \frac{1}{\frac{n-1}{r_1} - \frac{1}{a}}.$$

Af Ligning (2) haves:

$$\frac{d}{n} - \frac{f_1}{n} = \frac{1}{\frac{n-1}{r_2} - \frac{1}{f}}.$$

Heraf elimineres f_1 ved Addition:

$$\frac{d}{n} = \frac{1}{\frac{n-1}{r_1} - \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{n-1}{r_2} - \frac{1}{f}}.$$

Hvis vi for Kortheds Skyld sætte $\frac{n-1}{r_1} = \frac{1}{p_1}$, $\frac{n-1}{r_2} = \frac{1}{p_2}$, kan denne Ligning skrives saaledes:

$$\frac{d}{n} = \frac{ap_1}{a-p_1} + \frac{fp_2}{f-p_2}. \tag{3}$$

Denne Ligning tjener til at beregne f, naar a er given eller omvendt.

Ses bort fra Linsens Tykkelse ($d = 0$), kan Ligning (3) skrives saaledes:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

eller
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{p}, \qquad (3')$$

idet $\frac{1}{p}$ benyttes som forkortet Betegnelse for $(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$. Straalepunktet for det uendelig fjerne Billedpunkt kaldes det første Brændpunkt. Dets Afstand fra Linsen findes ved at sætte $f = \infty$ i (3'). Man finder da $a = p$. Billedpunktet for det uendelig fjerne Straalepunkt kaldes det andet Brændpunkt. Dets Afstand fra Linsen findes ved at sætte $a = \infty$ i (3'). Man finder da ogsaa: $f = p$. De 2 Brændpunkter ligge altsaa, naar man ser bort fra Linsens Tykkelse, lige langt fra Linsen (hver paa sin Side, da a og f begge faa samme Fortegn som p). Deres Afstand fra Linsen, p, kaldes Linsens Brændvidde.

En Linse med positiv Brændvidde kaldes en Samlelinse. Dens første Brændpunkt ligger foran, dens andet Brændpunkt bagved Linsen. Dette følger deraf, at disse Punkters Afstande fra Linsen begge blive positive. En Linse med negativ Brændvidde kaldes en Spredelinse. Dens første Brændpunkt ligger bagved Linsen, dens andet Brændpunkt foran Linsen.

En Diskussion af Ligning (3') fører til følgende Resultat (gjældende for begge Arter af Linser).

1) Naar Straalepunktet ligger udenfor det første Brændpunkt, ligger Billedpunktet udenfor det andet Brændpunkt.

2) Naar Straalepunktet ligger mellem første Brændpunkt og Linsen, ligger Billedpunktet paa samme Side af Linsen, men længere ude end Straalepunktet.

3) Naar Straalepunktet ligger paa samme Side af Linsen som andet Brændpunkt, ligger Billedpunktet paa samme Side af Linsen som Straalepunktet, men nærmere ved Linsen end baade Straalepunktet og andet Brændpunkt.

OM PLANENS UENDELIG FJERNE PUNKTER.

(AF EJGIL SCHMIDT).

Da jeg i nogle Opgaver til Brug ved Undervisningen, som jeg har indsendt til Tidsskriftet, har krævet nogle Anvendelser af Centralprojektion, ved hvilke det i det mindste vilde være heldigt, om Eleven havde Kjendskab til Begrebet »den uendelig fjerne Linie«, skal jeg tillade mig her at meddele den Fremstilling af dette Begreb, som jeg plejer at give mine Elever.

Punkterne i en Plan tænke vi os ved Centralprojektion fra et Punkt O projicerede ned i en anden Plan, der ikke er parallel med den første. Denne anden Plan kalde vi Projektionsplanen, den første simpelt hen Planen.

Til ethvert Punkt i Planen svarer da et bestemt Punkt i Projektionsplanen og omvendt. Gjennemløber et Punkt P i Planen en ret Linie a, saa vil dets Projektion P_1 gjennemløbe en anden Linie a_1, der er Skjæringslinie mellem Projektionsplanen og Planen Oa. Lade vi Punktet P paa Linjen a fjerne sig i det uendelige, saa vil den projicerende Linie OP nærme sig til en bestemt Grænsestilling, nemlig Linjen p gjennem O parallel med a, og P's Projektion maa derfor samtidig nærme sig til et aldeles bestemt Punkt P', der er Skjæringspunkt mellem p og a_1. Naar Punktet P fjerner sig i det uendelige, bærer dets Projektion sig altsaa ad ganske paa samme Maade, som om P nærmede sig til et bestemt Punkt paa a; thi i begge Tilfælde nærmer Projektionen sig til et bestemt Punkt paa a_1. Vi sige derfor om et Punkt, der paa en ret Linie fjerner sig i det uendelige, at det nærmer sig til et bestemt uendelig fjernt Punkt paa Linien; det Punkt P', som Punktets Projektion samtidig nærmer sig til, kalde vi det uendelig fjerne Punkts Projektion. Vi maa endvidere sige, at der paa en ret Linie kun ligger ét uendelig fjernt Punkt; thi hvad enten P fjerner sig i det uendelige i den ene eller den anden Retning paa Linien, saa nærmer P_1 sig til det samme

Punkt P'. Ved denne Sprogbrug have vi opnaaet den Fordel, at ethvert Punkt paa a_1 kan siges at være Projektion af et bestemt Punkt paa a; uden den nye Vedtægt vilde der have været en Undtagelse herfra, nemlig P'.

Ifølge det foregaaende har nu enhver Linie i Planen sit bestemte uendelig fjerne Punkt, der atter har en aldeles bestemt Projektion, nemlig Skjæringspunktet mellem Projektionsplanen og den med Linien parallele Linie gjennem O. Dersom 2 uendelig fjerne Punkter have samme Projektion, sige vi, at de falde sammen. Parallele Linier have altsaa det samme uendelig fjerne Punkt; thi deres uendelig fjerne Punkter projiceres alle i Skjæringspunktet mellem Projektionsplanen og den med dem parallele Linie gjennem O. Et System af parallele Linier siges derfor ogsaa at danne et Liniebundt; Liniernes Projektioner danne et sædvanligt Liniebundt.

Da alle Planens uendelig fjerne Punkter projiceres i den samme rette Linie, nemlig Skjæringslinien g mellem Projektionsplanen og en Plan gjennem O parallel med Planen, saa sige vi, at de alle ligge i en ret Linie, der kaldes Planens uendelig fjerne Linie. Linien g kaldes denne Linies Projektion. En Linies uendelig fjerne Punkt er altsaa dens Skjæringspunkt med den uendelig fjerne Linie.

En Kurve siges at gaa gjennem de uendelig fjerne Punkter, der projiceres i Skjæringspunkterne mellem Linien g og Kurvens Projektion. Disse uendelig fjerne Punkter kaldes Kurvens Skjæringspunkter med den uendelig fjerne Linie. Gjennem ethvert af Kurvens uendelig fjerne Punkter gaar der naturligvis et Bundt af parallele Linier, nemlig det, der projiceres i Liniebundtet med Toppunkt i det uendelig fjerne Punkts Projektion. En af disse Linier projiceres i Tangenten til Kurvens Projektion; den kaldes Kurvens Tangent i det uendelig fjerne Punkt. Enhver af Linierne i Bundtet skjærer Kurven i ét uendelig fjernt Punkt, Tangenten i to [1]).

---

[1]) Ifølge det ovenstaaende svarer der til ethvert uendelig fjernt Punkt paa Kurven et System af Paralleler, der skjære Kurven i dette uendelig fjerne Punkt. At nu Linierne i et saadant System ogsaa skjære Kurven uendelig fjernt i den Forstand, at, naar en ret Linie nærmer sig til en

Vi ville anvende det foregaaende paa Keglesnittene.

Hyperblen har 2 uendelig fjerne Punkter, da den har 2 Systemer af Paralleler, der skjære Kurven i et uendelig fjernt Punkt.

Ellipsen har ingen uendelig fjerne Punkter.

Parablen kan betragtes som Grænseform for Hyperblen. Idet denne gaar over i Parablen, falde de 2 Parallelbundter, der skjære Kurven uendelig fjernt, sammen i ét, ɔ: de 2 uendelig fjerne Punkter falde sammen. Parablen rører altsaa den uendelig fjerne Linie. Dette vil sige, at Parablens Projektion rører Linien *g*. Da Hyperblens Asymptoter skjære Kurven i 2 uendelig fjerne Punkter, ere de Tangenterne i disse Punkter, ɔ: de projiceres som Tangenterne til Kurvens Projektion i de Punkter, i hvilke denne skjæres af *g*. Naar Tangentens Røringspunkt fjerner sig i det uendelige, maa den nærme sig til en Asymptote; thi dens Centralprojektion maa nærme sig til en Tangent til Hyperblens Projektion i et af dennes Skjæringspunkter med *g*.

Trækkes en Linie gjennem et Keglesnits Centrum, saa vil det paa denne Linie liggende Punkt, der er konjugeret med Centrum med Hensyn til Keglesnittet, være dens uendelig fjerne Punkt.

Centrum og den uendelig fjerne Linie ere altsaa Pol og Polar med Hensyn til Keglesnittet, ɔ: deres Projektioner ere Pol og Polar med Hensyn til Keglesnittets Projektion.

For at nu det saaledes indførte mathematiske Sprog skal faa Betydning, maa den uendelig fjerne Linie vise sig at spille samme Rolle som enhver anden ret Linie; men dette ses ogsaa let, naar man stadig fastholder, at det, at 2 Kurver skjære hinanden i et Punkt af den uendelig fjerne Linie, vil sige, at deres Projektioner

---

af dem, det ene Skjæringspunkt da fjerner sig i det uendelige, ses straks. At omvendt en Linie af den sidste Beskaffenhed ogsaa ifølge den paa Centralprojektion støttede Definition skjærer Kurven uendelig fjernt, er indlysende. Vi kunne derfor i det følgende benytte de Sætninger om Linier, der skjære Keglesnit uendelig fjernt, der findes i enhver analytisk Geometri, uagtet vi oprindelig gaa ud fra en anden Definition af uendelig fjerne Skjæringspunkter.

skjære hinanden paa g, at det, at en Kurve rører denne Linie, vil sige, at dens Projektion rører g o. s. v.

Lad os tage et Exempel. Vi have i det foregaaende set, at Parablen kan defineres som et Keglesnit, der rører den uendelig fjerne Linie. Nu er et Keglesnit bestemt ved 5 Tangenter. En Parabel maa altsaa være bestemt ved 4 Tangenter. Sagen er ogsaa tydelig nok; thi Parablens Projektion rører Linien g og er derfor bestemt ved Projektionerne af de 4 opgivne Tangenter, Parablen maa altsaa ogsaa selv være bestemt. Konstruktionen af en Parabel, naar 4 Tangenter ere givne, er bekjendt nok.

Paa samme Maade indses let, at en Asymptote ved Bestemmelsen af en Hyperbel spiller samme Rolle som en Tangent og dens Røringspunkt, at en Parabel, hvis Akseretning er given, er et Keglesnit, ved hvilket man kjender en Tangent og dens Røringspunkt, at et Keglesnit med givet Centrum er det samme som et Keglesnit, ved hvilket man har opgivet en Pol og dens Polar (der igjen er lige saa godt som 2 Punkter eller 2 Tangenter) o. s. v.

Som bekjendt kunne visse Egenskaber ved en Figur direkte overføres paa dens Centralprojektion. Disse Egenskaber kaldes projektive Hertil høre ikke de saakaldte metriske Egenskaber Enhver metrisk Egenskab kan imidlertid udtrykkes som en projektiv Egenskab, ved hvilken den uendelig fjerne Linie spiller en særlig Rolle, og i denne nye Form kan den overføres paa enhver Centralprojektion af den oprindelige Figur. Derved bliver det muligt ogsaa af Sætninger om en Figur, der angaa metriske Egenskaber, at udlede mere almindelige Sætninger, der indbefatte dem, men i hvilke den uendelig fjerne Linie er erstattet af en vilkaarlig Linie.

Vi ville som Exempel tage den Sætning: Diagonalerne i et Parallelogram halvere hinanden.

Det er ikke en projektiv Egenskab, at et Punkt ligger midt mellem 2 andre, og i den angivne Form kan Sætningen derfor ikke overføres paa Figurens Centralprojektion.

Sætningen kan imidlertid udtrykkes saaledes: en Diagonal i et Parallelogram deles harmonisk af den anden Diagonal og den uendelig fjerne Linie. I denne Form kan den overføres paa enhver

Centralprojektion af Figuren. Til Parallelogrammet kommer da til at svare i Projektionsplanen en Firkant, hvis modstaaende Sider skjære hinanden paa g, der ved passende Valg af Projektionscentret kan bringes til at falde sammen med en vilkaarlig Linie; Diagonalerne i Parallelogrammet projiceres i Firkantens Diagonaler.

Dersom vi ogsaa kalde g Diagonal i Firkanten [1]), faa vi altsaa Sætningen: en Diagonal i en Firkant deles harmonisk af de 2 andre Diagonaler.

EN KOMBINATIONSOPGAVE.

(AF S. HERTZSPRUNG).

At bestemme Antallet af Maader, hvorpaa Tallene 1, 2, 3, 4 .... n kunne opstilles i Række saaledes, at Differensen mellem to ved Siden af hinanden staaende Tal overalt skal være numerisk forskjellig fra 1.

(Dette vil altsaa sige, at f. Ex. Tallet 3 hverken maa staa umiddelbart tilhøjre eller tilvenstre for 2 eller 4, 7 hverken umiddelbart tilhøjre eller tilvenstre for 6 eller 8 o. s. v. — For $n = 4$ faas saaledes kun to mulige Opstillinger, nemlig 2413 og den omvendte 3142).

Efter Anmodning af Tidsskriftets Redaktion skal jeg nedenfor meddele en Løsning af denne Opgave. Jeg har tidligere (Aarg. 1879, S. 140) berørt Spørgsmaalet, der staar i en vis Forbindelse med en Opgave fra Skakspillet, nemlig at bestemme Antallet af Maader, hvorpaa n Dronninger kunne opstilles paa et kvadratisk Skakbrædt med n^2 Tavl saaledes, at ingen af Dronningerne angriber nogen af de andre. Sidstnævnte Opgave, der, saavidt jeg ved, endnu henstaar uløst, og vistnok ogsaa er meget vanskelig, er i algebraisk Form: »At bestemme Antallet af Maader, hvorpaa Tallene 1, 2, 3 . . . n kunne opstilles i Række saaledes, at Differensen mellem to hvilke som helst af Tallene skal være numerisk forskjellig fra Differensen mellem Numrene paa deres Pladser.« Ovenstaaende Opgave er

[1]) Navnet »Firsidet Figur« forekommer os her heldigere. — Red.

altsaa kun et meget lille Skridt henimod dette Problem. Dens Betydning for Skakbrædtet vilde være, at man søgte Antallet af Maader, hvorpaa ikke n Dronninger, men n Brikker, der bevæge sig paa en Gang som Taarn og Konge, kunne opstilles, uden at nogen angriber en anden. Var Spørgsmaalet kun om n Taarne, vilde den tilsvarende Betingelse for Opstillingen af Tallene $1, 2, 3 \ldots n$ indskrænke sig til, at intet af Tallene maa staa paa sin oprindelige Plads, hvilken Opgave er løst bl. A. paa det citerede Sted.

Den — i øvrigt kun lidet elegante — Løsning, jeg har til den nu foreliggende Opgave, er følgende.

Antallet af de Opstillinger, hvori Tallene $1, 2, 3 \ldots k$ opfylde Betingelsen, at to en Enhed forskjellige Tal ikke maa staa ved Siden af hinanden (idet dog k kan staa ved Siden af $k+1$), medens de øvrige Tal kunne staa paa vilkaarlige Pladser, være $u_{n,k}$.

De af Opstillingerne $u_{n,k}$, hvori k staar ved Siden af $k+1$, være i Antal $v_{n,k}$.

Man har da aabenbart

$$u_{n,k+1} = u_{n,k} - v_{n,k}. \tag{1}$$

Men der kan findes endnu en Relation mellem Funktionerne u og v. Opstillingerne $v_{n,k}$ kunne nemlig fremkomme saaledes: Man tænker sig Tallet $k+1$ udtaget af de n, og af de resterende $n-1$ Tal Opstillingerne $u_{n-1,k}$ og $v_{n-1,k-1}$ dannede. Man vil da faa alle Opstillingerne $v_{n,k}$, naar man anbringer Tallet $k+1$ dels i Opstillingerne $u_{n-1,k}$, hvor det sættes ved Siden af k (ɔ: tilhøjre eller tilvenstre for k, altsaa paa et af to Steder) og dels i Opstillingerne $v_{n-1,k-1}$, hvor det sættes paa et bestemt Sted, nemlig mellem $k-1$ og k. Altsaa maa man have

$$v_{n,k} = 2u_{n-1,k} + v_{n-1,k-1}. \tag{2}$$

Indsættes heri $v_{n,k}$ og $v_{n-1,k-1}$ udtrykte ved u ifølge (1), faas efter Forandring af k til $k-1$

$$u_{n,k} = u_{n,k-1} - u_{n-1,k-1} - u_{n-1,k-2}, \tag{3}$$

hvilken Differensligning kan tjene til Bestemmelse af $u_{n,k}$ og derved af $u_{n,n}$, som søges.

Da man, som det let ses, har $u_{n,1} = P_n = [n]$ og $v_{n,1} = 2P_{n-1}$, (idet 1 2 eller 2 1 kan betragtes som et Element), saa at man af (1) faar $u_{n,2} = P_n - 2P_{n-1}$, giver (3) efterhaanden.

$u_{n,1} =$	1	P_n								
$u_{n,2} =$	1	$-\ 2$	P_{n-1}							
$u_{n,3} =$	1	$-\ 4$	$+\ 2$	P_{n-2}						
$u_{n,4} =$	1	$-\ 6$	$+\ 8$	$-\ 2$	P_{n-3}					
$u_{n,5} =$	1	$-\ 8$	$+\ 18$	$-\ 12$	$+\ 2$	P_{n-4}				
$u_{n,6} =$	1	$-\ 10$	$+\ 32$	$-\ 38$	$+\ 16$	$-\ 2$	P_{n-5}			
$u_{n,7} =$	1	$-\ 12$	$+\ 50$	$-\ 88$	$+\ 66$	$-\ 20$	$+\ 2$	P_{n-6}		
$u_{n,8} =$	1	$-\ 14$	$+\ 72$	$-\ 170$	$+\ 192$	$-\ 102$	$+\ 24$	$-\ 2$	P_{n-7}	
$u_{n,9} =$	1	$-\ 16$	$+\ 98$	$-\ 292$	$+\ 450$	$-\ 360$	$+\ 146$	$-\ 28$	$+\ 2$	P_{n-8}
$u_{n,10} =$	1	$-\ 18$	$+\ 128$	$-\ 462$	$+\ 912$	$-\ 1002$	$+\ 608$	$-\ 198$	$+\ 32$	$-\ 2P_{n-9}$

o. s. v., hvori Koefficienterne følge Loven (3), idet f. Ex. $146 = 24 + 102 + 20$.

Tallene i disse Kolonner danne Differensrækker af henholdsvis 0'te, 1ste, 2den . . . . Orden, og betragtes f. Ex. Koefficienterne for P_{n-5}, idet man begynder med 0, som i $u_{n,5}$ er Koefficient for P_{n-5}, blive Differenserne

0					
	2				
2		16			
	18		48		
20		64		64	
	82		112		32
102		176		96	
	258		208		
360		384			
	642				
1002					

hvoraf man ser, at øverste Række Differenser 2, 16, 48, 64, 32 er Leddene i Udviklingen af $2\,(1 + 2)^4$. Tilsvarende Lov for Differensdannelsen viser sig, saa langt Regningen er udført, at gjælde for de andre Kolonner, og dersom i Almindelighed øverste Række Differenser for Koefficienterne til P_{n-a}, begyndende med 0, er Leddene i $2\,(1 + 2)^{a-1}$, bliver Koefficienten for P_{n-a} i $u_{n,k}$ efter den sædvanlige Summationsformel

$$\left.\begin{aligned} -(-1)^{\alpha}\Big(2(k-\alpha) &+ 2^2\frac{(k-\alpha)(k-\alpha-1)}{1.2}\cdot\frac{\alpha-1}{1} \\ &+ 2^3\frac{(k-\alpha)(k-\alpha-1)(k-\alpha-2)}{1.2.3}\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2} \\ &+ 2^4\frac{(k-\alpha)(k-\alpha-1)(k-\alpha-2)(k-\alpha-3)}{1.2.3.4} \\ &\qquad\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3}+\dots\Big). \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Heraf vil følge

$$\left.\begin{aligned} u_{n,k} = P_n &- 2(k-1)P_{n-1} \\ &+\left(2(k-2)+2^2\frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\right)P_{n-2} \\ &-\Big(2(k-3)+2^2\frac{(k-3)(k-4)}{1.2}.2 \\ &\qquad+2^3\frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{1.2.3}\Big)P_{n-3} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+(-1)^{k-1}2P_{n+1-k}, \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

og Forandring heri af k til n vil give det søgte Resultat.

Men (5) vil nu vise sig at tilfredsstille Differensligningen (3), og Udtrykket for $u_{n,k}$ er altsaa rigtigt.

Man ser nemlig, at (4) er Koefficienten for $x^{k-\alpha}$ i Udviklingen af $(-1)^{\alpha}2x(x+1)^{k-\alpha}(1+2x)^{\alpha-1}$. Af denne og tilsvarende Koefficienter faas de 4 Ligheder, at Koefficienten for $P_{n-\alpha}$ i henholdsvis $u_{n,k}$, $u_{n,k-1}$, $u_{n-1,k-1}$ og $u_{n-1,k-2}$ er Koefficienten for $x^{k-\alpha}$ i Udviklingerne henholdsvis af

$$(-1)^{\alpha}2x(x+1)^{k-\alpha}(1+2x)^{\alpha-1}, \tag{6}$$

$$(-1)^{\alpha}2x^2(x+1)^{k-1-\alpha}(1+2x)^{\alpha-1}, \tag{7}$$

$$(-1)^{\alpha-1}2x(x+1)^{k-\alpha}(1+2x)^{\alpha-2} \tag{8}$$

og

$$(-1)^{\alpha-1}2x^2(x+1)^{k-1-\alpha}(1+2x)^{\alpha-2}. \tag{9}$$

Her er imidlertid identisk

$$(6) = (7) - (8) - (9),$$

og altsaa maa ogsaa Koefficienterne for $x^{k-\alpha}$ i Udviklingerne af disse Udtryk give samme Identitet eller tilfredsstille (3).

(5) giver som Resultat $u_{n,n}$

for	$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots$
at være	$1, 0, 0, 2, 14, 90, 646, 5242 \ldots$

Det forekommer mig vanskeligt at bringe det besværlige Udtryk (5) paa en simplere Form. Dersom Opgavens Betingelse indskrænkedes til, at man i de Opstillinger, hvis Antal søges, ikke maa have noget Tal staaende foran det nærmest højere, medens det derimod vel kan staa bagefter, vilde Antallet blive det hele Tal, som ligger nærmest ved $\frac{[n+1]}{ne}$, hvor e er Grundtallet for de naturlige Logarithmer. Dette nemme Udtryk fremkommer imidlertid ved Simplifikationer, der synes ikke at have noget tilsvarende i den her behandlede Opgave.

EN GENERALISATION AF SYLVESTERS SKJÆVE PANTOGRAF.

(AF KR. BIRKELAND).

Tænker man sig paa det leddede Parallelogram $ACEG$'s Sider konstrueret Triangler saaledes, at: (vi vil sætte saadanne Bogstaver paa de fremkomne Triangelspidser, at den ydre Omkreds bliver $ABCDEFGH$) $\angle HAB = \angle BCD = \angle DEF = \angle FGH$, samt $AH : AB = DC : CB = DE : EF = HG : GF$, vil Trianglerne HAB, DCB, DEF og HGF være direkte ligedannede [1]). Heraf vil følge, at:

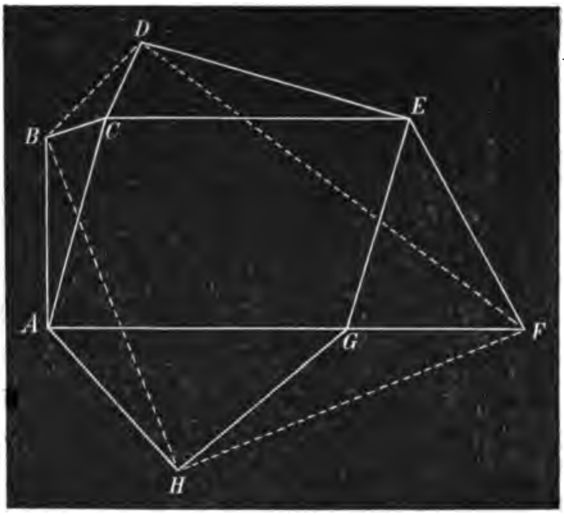
$$\angle HBD = \angle ABC; \; \angle BDF = \angle CDE \text{ o. s. v.,}$$

ɔ: Vinklerne i Firkanten $HBDF$ ere konstante. Endvidere vil:

$$HB : BD = AB : BC, \; BD : DF = CD : DE \text{ o. s. v.}$$

Man ser heraf, at Firkanten $HBDF$ er af konstant Form, og man har saaledes, at naar et Hjørne holdes fast, og et andet bevæger sig i en vis Kurve, vil de to øvrige Hjørner beskrive dermed ligedannede Kurver drejet om visse Vinkler.

[1]) Da Forf. har udtrykt sig kortere, end hans Figurs meget smukke Egenskaber fortjene, indskyde vi den vejledende Bemærkning, at $\triangle HGF$ af sig selv bliver ligedannet med de andre. — Red.



Sylvesters skjæve Pantograf vil fremkomme af denne, om man tænker sig en af Siderne i Firkanten, f. Ex. HB svinde ind til Nul. Skal nu Forholdene mellem Firkantens af de paa Parallelogrammet konstruerede Trianglers Sider være de opgivne, maa Siderne AB og AH ligeledes svinde ind, og Siderne BC og HG altsaa gaa over til respektive AC og AG. Forholdene modificeres da til:

$$DC : EG = DE : EF = CE : GF,$$

og man har Sylvesters Pantograf.

Er Firkanten $HBDF$ falden sammen til en ret Linie, vil Pantografen gaa over til en Storkesnabel, hvor Punkterne H, B, D og F falder en paa hver af Parallelogrammets Sider.

Man vil se, at den her beskrevne Pantograf bekvemt kan erstatte Prof. Zeuthen's udvidede Pantograf i hans interessante Anvendelse af Stangsystemer til Konstruktion af projektive Figurer (Tidsskrift 1877). Det gjaldt nemlig at skaffe sig en Firkant af opgiven konstant Form. Fordelen ved dette Apparat bliver et mindre Antal bevægelige Stænger og Led. Man kan ogsaa udvide denne Pantograf, enten paa en lignende Maade som den af Zeuthen angivne, eller simplest ved at kombinere flere saaledes, at to og to af de konstante Firkanters Hjørner blive de samme.

EXAMENSOPGAVER.

Polyteknisk Examen. Januar 1887.

For Mekanikere og Ingeniører.

Mathematik.

1. Ligningen $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0$ har det partikulære Integral

$$y = \sin x + \frac{\cos x}{x}.$$

Find det fuldstændige Integral til Ligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = x^2.$$

2. I xy-Planen ligger en Cirkel med Radius a og Centrum i Begyndelsespunktet. En ret Linie bevæger sig, saa at den stadig skjærer denne Cirkel, z-Axen og en vilkaarlig Kurve. Find den til det saaledes bestemte Fladesystem hørende partielle Differentialligning (Karakterligning) og vis derpaa, hvorledes denne Ligning integreres.

3. En Ellipse med Halvaxerne a og $3a$ ligger i en vertikal Plan med den store Axe vandret. En tung, ret Linie med Længden $3a$ støtter sig med sit nederste Endepunkt til den konkave Side af Ellipsens nederste Halvdel, med sit øverste Endepunkt til den lille Axe eller dens Forlængelse. Liniens Tæthed er proportional med Afstanden fra dens øverste Endepunkt, og dens Vægt er mg. Find Ligevægtsstillingen og Trykkene. Der forudsættes ikke at være nogen Gnidningsmodstand.

Naar Linien begynder at glide ud fra den lodrette Stilling med Vinkelhastigheden k, hvorledes varierer da Vinkelhastigheden med Vinklen?

Naar Linien svinger om en vandret Axe gjennem dens øverste Endepunkt, hvorledes bestemmes da den reducerede Pendullængde?

(NB. Af de to sidste Spørgsmaal fordres kun det ene besvaret).

Opl. 1. Sættes $y = z\left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right)$,

faas $\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx}\left(\frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^3}{x\sin x + \cos x}$,

der er lineær af første Orden med Hensyn til $\frac{dz}{dx}$.

Med de sædvanlige Betegnelser er

$$\int P dx = 2\,(l.(x\sin x + \cos x) - l.x),$$

altsaa
$$e^{-\int P dx} = \left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right)^{-2}$$

og
$$\frac{dz}{dx} = \left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right)^{-2}\left(\int (x^2 \sin x + x\cos x)\,dx + C\right)$$

$$= \frac{-x^4\cos x + 3x^2(x\sin x + \cos x) + Cx^2}{(x\sin x + \cos x)^2},$$

$$z = \frac{x^3}{x\sin x + \cos x} + C\int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x + \cos x)^2}.$$

Det sidste Integral findes ved delvis Integration, nemlig

$$\int \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2} = \int \frac{x\cos x\,dx\,.\,\frac{x}{\cos x}}{(x\sin x + \cos x)^2} =$$

$$\frac{-x}{\cos x\,(x\sin x + \cos x)} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x},$$

altsaa
$$z = \frac{x^3}{x\sin x + \cos x} + c_1\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x} + c_2$$

og
$$y = x^2 + c_1\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) + c_2\left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right).$$

2. Lad Frembringeren skjære Cirklen i Punktet $(\alpha, \beta, 0)$, z-Axen i $(0, 0, \gamma)$; dens Ligninger ere da

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z-\gamma}{-\gamma} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a},$$

hvoraf
$$\beta = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \gamma = \frac{az}{a - \sqrt{x^2+y^2}}.$$

Den anden Ledelinie giver en Forbindelse mellem β og γ. Fladesystemets Ligning kan derfor skrives

$$z = (a - \sqrt{x^2+y^2})\,f\left(\frac{y}{x}\right),$$

hvor f er en arbitrær Funktion. Til Elimination af denne har man

$$p = -(a - \sqrt{x^2 + y^2}) f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x^2} - f\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$q = \quad (a - \sqrt{x^2 + y^2}) f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} - f\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Heraf findes

$$px + qy = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - a} z,$$

der er den søgte partielle Differentialligning.

For at integrere denne, sætte vi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right);$$

Vi faa da først $y = cx$ og derpaa

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} + \left(1 - \frac{a}{x\sqrt{1 + c^2}}\right) \text{ eller } \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x - \frac{a}{\sqrt{1 + c^2}}};$$

hvoraf

$$z = C\left(x - \frac{a}{\sqrt{1 + c^2}}\right) = C\left(x - \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = Cx \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - a}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

altsaa
$$c = \frac{y}{x}; \; C = \frac{z}{a - \sqrt{x^2 + y^2}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

der giver den oprindelige Ligning,

$$z = (a - \sqrt{x^2 + y^2}) f\left(\frac{y}{x}\right).$$

3. Tyngdepunktets Afstand fra Stangens øverste Endepunkt bestemmes ved

$$\int_0^{3a} x^2 \, dx : \int_0^{3a} x \, dx = 2a.$$

Er dets Ordinat y, giver de virtuelle Hastigheders Princip Ligevægtsbetingelsen

$$dy = 0.$$

Er nu $(0, y_1)$ Stangens øverste, (x, y) dens nederste Endepunkt, har man

$$(y_1 - y)^2 + x^2 = 9a^2 \quad \text{og} \quad x^2 + 9y^2 = 9a^2,$$

altsaa, da y_1 og y maa have forskjellige Fortegn

$$y_1 = -2y,$$

der atter giver

$$y = 0.$$

Tyngdepunktet ligger derfor altid i x-Axen, og der er Ligevægt i enhver Stilling. Trykkene bestemmes let, idet Kræfterne projiceres paa Axerne.

Danner Stangen Vinklen θ med den lille Axe, og er ξ Tyngdepunktets Abscisse, har man

$$\xi = 2a \sin \theta; \quad \frac{d\xi}{dt} = 2a \cos \theta \frac{d\theta}{dt},$$

saa at den levende Kraft, hvis hele Massen var samlet i Tyngdepunktet, var

$$2a^2 m \cos^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Inertimomentet om en vandret Axe gjennem det øverste Endepunkt er mk^2, hvor

$$k^2 = \int_0^{3a} x^3 dx : \int_0^{3a} x dx = \frac{9a^2}{2}.$$

For en dermed parallel Axe gjennem Tyngdepunktet er Inertimomentet da $\frac{a^2}{2} . m$, og den levende Kraft for Drejning om Tyngdepunktet

$$\frac{a^2}{4} m . \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Den samlede levende Kraft er saaledes

$$\frac{a^2}{4} . m \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (1 + 8 \cos^2 \theta),$$

altsaa for Begyndelsesstillingen

$$\frac{9}{4} a^2 m k^2.$$

Da nu intet Arbejde udføres af de virkende Kræfter, maa den levende Kraft være konstant, altsaa

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (1 + 8 \cos^2 \theta) = 9 k^2,$$

der angiver den søgte Forbindelse mellem Vinkel og Vinkelhastighed.

Ophænges Stangen i det øverste Endepunkt, bliver den reducerede Pendullængde

$$\frac{9}{2}a^2 : 2a = \frac{9}{4}a.$$

For Kemikere.

To Punkter bevæge sig paa en Cirkelperiferi i samme Omløbsretning, det ene med dobbelt saa stor Hastighed som det andet. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af Punkternes Forbindelseslinie, og bestem de af Kurven begrænsede Arealer.

Opl. Er Cirklens Centrum O, Punkterne A og B, det Punkt, hvor de falde sammen, X og M Kordens Midtpunkt, kunne vi tage OX som Axe for et polært Koordinatsystem; er $OM = r$; $OX = a$, $\angle XOM = \theta$, altsaa $\angle AOM = \frac{\theta}{3}$, faas strax den søgte Ligning

$$r = a \cos \frac{\theta}{3},$$

der i retvinklede Koordinater bliver

$$4(x^2 + y^2)^2 - 3a^2(x^2 + y^2) = a^3 x.$$

Formen viser, at begge de uendelig fjerne Cirkelpunkter ere Dobbeltpunkter, saa at der højst kan være et Dobbeltpunkt til; søges dette paa sædvanlig Maade, finder man Punktet $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$; at dette er et Dobbeltpunkt ses ogsaa strax af den polære Ligning, idet det bestemmes ved $\theta = \pi$; $r = \frac{a}{2}$ saavelsom ved $\theta = 2\pi$; $r = -\frac{a}{2}$. Kurvens Form findes let ved Hjælp af den polære Ligning.

Øjet faar Arealet

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} r^2 \, d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 + \cos \frac{2\theta}{3}\right) d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

Det hele indesluttede Areal, indbefattet Øjet, bliver

$$\int_0^{\pi} r^2 \, d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

LØSNING AF OPGAVERNE 522, 534, 535, 540, 541, 544, 545.

522. Træk en ret Linie, der skjærer to givne Cirkler saaledes, at de tre mellem Skjæringspunkterne liggende Liniestykker ere lige store.

(S. A. Christensen).

Man kan bestemme Centrerne for de Cirkler i det ved de givne Cirkler bestemte Bundt, der røre den søgte Linie. Da Røringspunkterne nemlig dele de to Korder harmonisk, ser man uden Vanskelighed, at de dele Stykket mellem Kordernes Midtpunkter i Forholdet $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$. De Linier, der løse Opgaven, blive følgelig Fællestangenterne til de to Cirkler i Bundtet, hvis Centrer dele de givne Cirklers Centerlinie i Forholdet $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.[1])

(C. Crone).

534. Find Værdien af det bestemte Integral:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg\,\theta\,d\theta}{e^{2\pi\,tg\,\theta} - 1}.$$

(J. L. W. V. Jensen).

Sættes $tg\,\theta = x$ faar man

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}\left(e^{-2\pi} + e^{-4\pi x} + \ldots\right),$$

hvor Rækkeudviklingen kan benyttes, uagtet Konvergensen hører op ved den lavere Grænse, da man i det givne Integral for den lavere Grænse kan sætte en meget lille positiv Størrelse; man omskriver nu let Integralet til

$$\int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x}{k^2+x^2}\, e^{-2\pi x}\,dx;$$

---

[1]) Jvfr. Løsningen i Aarg. 1886, S. 25.

Nu er (se f. Ex. Schlömilchs Comp. § 80)

$$\Sigma \frac{x}{k^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} - \frac{1}{2x},$$

altsaa $$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\pi \frac{e^{-2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{e^{-2\pi x}}{x} \right) dx,$$

der for $e^{-2\pi x} = z$, bliver

$$J = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{2}{lz} \right) dz = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{lz} + \frac{1}{1-z} \right) dz.$$

Integralet her bliver, idet α er en Størrelse, der konvergerer til 1,

$$Li(\alpha) - l(1-\alpha),$$

der, naar Rækken for $Li(\alpha)$ benyttes, bliver (C er den Eulerske Konstant)

$$C + \left[l \cdot \frac{[l\alpha]}{1-\alpha} \right]_{\alpha=1},$$

hvor $[l\alpha]$ betegner den numeriske Værdi; da Størrelsen i Parenthesen konvergerer til Nul, faar man saaledes

$$J = \frac{1}{2} C - \frac{1}{4}.$$

(Jul. Petersen).

535. Summer de uendelige konvergente Rækker

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \sin\left(2p\pi \frac{l\nu}{l2}\right)$$

og $$\sum_{\nu=1}^{\alpha} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \cos\left(2p\pi \frac{l\nu}{l2}\right),$$

hvor p er et helt Tal.

(J. L. W. V. Jensen).

Rækken

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^\alpha} \sin\left(2p\pi \frac{l\nu}{l2}\right)$$

er ubetinget konvergent, naar $\alpha > 1$. Vi kunne da samle de Led, hvor, idet q er et ulige Tal,

$$\nu = q,\ 2q,\ 2^2 q \ldots;$$

disses Sum er

$$\frac{1}{q\alpha}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}-\frac{1}{2^{2\alpha}}\dots\right)\sin\left(2p\pi\frac{lq}{l2}\right),$$

der konvergerer til Nul, naar α konvergerer til 1. Det samme gjælder, naar *sin* ombyttes med *cos*. De to af Hr. J. L. W. V. Jensen opstillede Rækker have derfor Summen Nul, i al Fald, naar de betragtes som Grænser for de ovenfor betragtede mere almindelige Rækker.

(Jul. Petersen).

540. Givet to Punkter A og B og to rette Linier M og N. Man skal konstruere en Cirkel, der gaar gjennem A og skjærer M i X, N i Y, saaledes, at XY gaar gjennem B, hvorfra tillige Radius til X ses under en given Vinkel

(N. Madsen).

Figuren tænkes inverteret med B som Inversionscentrum. Betegnelserne beholdes. Vi kunne da, idet vi foreløbig se bort fra det givne Punkt A, søge det geometriske Sted for den søgte Cirkels Centrum Z (efter Inversionen). X og Y gjennemløbe ligedannede Punktrækker paa Cirklerne M og N. Midtpunktet P af XY gjennemløber da en Punktrække, ligedannet med de andre paa en Cirkel gjennem Skjæringspunkterne for M og N; det ene af disse B_1 er fælles Drejningspunkt for de tre Punktrækker. $\angle XBZ$ er den givne Vinkel. Trekanten BPZ har da konstant Form, saa at Z beskriver en med de andre ligedannet Punktrække; denne og Punktrækken P have deres Drejningspunkt i B.

Lad Q være Drejningspunktet for Punktrækkerne Z og X. Man kjender da Forholdet $QZ : XZ$ eller $QZ : AZ$; derved faas en Cirkel som andet geometrisk Sted for Z.

(Jul. Petersen).

541. Hvilken Kurve skal man lade rulle paa en ligesidet Hyperbel, for at et Punkt i fast Forbindelse med den rullende Kurve skal beskrive Hyperblens Assymptote.

(C. Juel).

Lad Hyperblen i et retvinklet Koordinatsystem være fremstillet ved Ligningen $xy = a^2$, og lad y-Axen være den Asymptote,

der beskrives af Punktet. Røre Kurverne hinanden i Punktet A, ligger samtidig det beskrivende Punkt i A's Projektion B paa Asymptoten. Tænkes den rullende Kurve henført til et polært Koordinatsystem med Pol i det beskrivende Punkt, er $BA = x = r$, og man finder for tg. til Vinklen fra BA til den fælles Tangent i A Værdierne:

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{x^2} = -\frac{a^2}{r^2}.$$

Kurven, hvis Ligning ved Integration findes at være $a^2 = 2r^2(\theta + c)$, er altsaa Spiralen Lituus[1]).

(C. Crone).

544. Konstruer en Sexkant, hvis modstaaende Sider ere parallele, af Siderne.

(A. S. Bang).

Lad Sexkanten være $ABCDEF$. Antages $AB < ED$, kan den brudte Linie BCD parallelforskydes, saa at B falder i A, C i C_1 og D i D_1. I Femkanten AC_1D_1EF kjendes, da $ED_1 = ED - AB$, alle Sider, og AC_1 er parallel med FE, C_1D_1 med AF. Antages $CD < AF$, kan den brudte Linie D_1EF parallelforskydes, saa at D_1 falder i C_1, E i E_1 og F i F_1. I Firkanten $AC_1E_1F_1$ kjender man, da $C_1E_1 = ED - AB$ og $F_1A = FA - CD$, alle Sider, og AC_1 er parallel med E_1F_1. Antages $EF < BC$, kan Linien E_1C_1 parallelforskydes, saa at E_1 falder i F_1 og C_1 i C_2. I Trekanten AC_2F_1 er da Siderne Differenserne mellem de givne modstaaende Sider i Sexkanten. Denne Trekant kan derfor konstrueres, og da enhver af Siderne bliver parallel med det Par modstaaende Sider i Sexkanten, hvis Differens den er, kjender man baade Størrelse og Retning af Sexkantens Sider, hvorved den let konstrueres.

Opgaven løses paa en simpel Maade ved en mekanisk Betragtning. Antages nemlig den forlangte Sexkant $ABCDEF$ konstrueret, saa vil Punktet A være i Ligevægt, naar det angribes af Kræfter, lige store og parallele med Sexkantens Sider. Man parallelforskyder Siden DE, saa at D falder i A, E i E_1.

[1]) Ogsaa løst af A. S. Bang.

Kræfterne AB og AE_1 virke da i modsatte Retninger og kan sammensættes til en Kraft, lig deres Differens, virkende i samme Retning som den største af Kræfterne AB og AE_1. Paa samme Maade med de 2 andre Par modstaaende Sider. Puntet A skal altsaa være i Ligevægt, naar det paavirkes af tre Kræfter. hver lig Differensen mellem et Par modstaaende Sider i Sexkanten og parallel med disse Sider. Men Retningerne af tre givne Kræfter, der skal holde hinanden i Ligevægt, faas som bekjendt netop ved at tegne en Trekant med Kræfterne til Sider.

(L. Ankjær).

545. Givet 2 rette Linier og i hver et Punkt. Læg gjennem Punkterne en Cirkel, som af Linierne afskjærer Korder, som have a) given Sum eller Differens, b) givet Forhold, c) givet Produkt.

(A. S. Bang).

Lad de 2 Linier være AO og BO, idet O er deres Skjæringspunkt, og lad Cirklen skjære den første i C, den anden i D. Man kjender da Retningen af CD. Parallelforskydes CA, saa at C falder i D og A i A_1, kommer A_1 til at ligge paa en given Linie AQ. Man skal altsaa konstruere Trekanten BDA_1.

a) Man indfører den givne Sum eller Differens paa Figuren ved at afsætte den lig BP eller BP_1 paa BO til begge Sider. Man ser da let, at man som geometrisk Sted for A_1 faar 2 paa hinanden vinkelrette Linier gjennem P og ligeledes 2 paa hinanden vinkelrette Linier gjennem P_1, af hvilke hver er parallel med sin af Linierne gjennem P; disse 4 Linier med AQ bestemme 4 Løsninger.

b) Da $BD : DA_1$ er givet, faar man som geometrisk Sted for A_1 2 Linier gjennem B, harmonisk forbundne med BO og $BS \neq AO$. Disse to Linier i Forbindelse med AQ bestemme 2 Løsninger.

c) Er $BD \, . \, DA_1$ givet, faar man som geometrisk Sted for A_1 de 2 konjugerede Hyperbler med BA og en Linie gjennem B, parallel med AO, til Asymptoter. Disse 2 Hyperbler bestemme sammen med AQ 4 Løsninger. Hyperblernes Skjæring med Linien er bekjendt.

(L. Ankjær).

OPGAVER TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN.

(60—86 af Ejgil Schmidt, 87—88 af C. Crone).

60. Hvorledes kan man ved Inversion bevise den bekjendte Sætning:

Det geometriske Sted for de Punkter, der ere konjugerede med et givet Punkt med Hensyn til en given Cirkel, er en ret Linie (Polaren).

61. Hvilken Sætning udledes ved Inversion af følgende: Diametrene i en Cirkel skjære Cirklen orthogonalt

62. Bevis, at dersom en i en fast Cirkel indskreven Firkants ene Side drejer sig om et fast Punkt, medens Diagonalernes Skjæringspunkt ligger fast, saa drejer den modstaaende Side sig ogsaa om et fast Punkt. (Inverter).

63. To Paralleler dreje sig hver om sit faste Punkt. Bevis, at Forbindelseslinien mellem deres Skjæringspunkter med 2 faste Paralleler ogsaa drejer sig om et fast Punkt.

64. Der er givet 2 faste Punkter og 3 Paralleler. Fra et bevægeligt Punkt paa den ene af Parallelerne trækkes Linier til de faste Punkter; bevis, at Forbindelseslinien mellem disse Liniers Skjæringspunkter med de 2 andre Paralleler gaar gjennem et fast Punkt.

65. Der er givet 3 Paralleler og paa den ene 2 faste Punkter. Fra et bevægeligt Punkt paa en 4de given Linie trækkes Linier til de faste Punkter; bevis, at Forbindelseslinien mellem disse Liniers Skjæringspunkter med de 2 andre Paralleler gaar gjennem et fast Punkt.

66. Hvilke mere almindelige Sætninger kunne ved Centralprojektion udledes af Sætningerne 63, 64 og 65?

67. Der er givet 2 Cirkler med Skjæringspunkter i A og B samt et Punkt P. Læg gjennem A og P en Cirkel, der skjærer de givne Cirkler anden Gang i 2 Punkter, der ligge i ret Linie med B.

68. Der er givet 2 Punkter og 2 rette Linier. Træk 2 rette Linier hver gjennem sit af de givne Punkter, saa at de skjære hinanden paa den ene givne Linie og af den anden afskjære et givet Stykke

69. Hvilken Sætning udledes ved Centralprojektion af følgende: Diagonalerne i et Parallelogram halvere hinanden?

70. Konstruer Skjæringspunkterne mellem et Keglesnit og en Cirkel, der gaar gjennem det ene Brændpunkt og har Centrum paa Brændpunktsaxen.

71. Bevis, at naar en ret Vinkel har sit Toppunkt i et givet Punkt af en ligesidet Hyperbel, saa vil den Linie, der forbinder Skjæringspunkterne mellem Benene og Hyperblen, have konstant Retning.

72 Konstruer en Trekant af $\frac{a}{b}$, h_a og v_C.

73. En Firkant er indskreven i en Cirkel. Bevis, at Forbindelseslinien mellem Diagonalernes Skjæringspunkt og Midtpunktet af en Side ses fra de 2 tilstødende Siders Midtpunkter under samme Vinkel.

74. Bevis ved Drejningsteorien, at en bevægelig Tangent til en Parabel skjærer 2 faste Tangenter i ligedannede Punktrækker. (Brændpunktet er Drejningspunkt).

75. Udled af Sætning 74 følgende:

a) Det Stykke af en bevægelig Tangent til en Parabel, der afskjæres mellem 2 faste, ses fra Brændpunktet under en konstant Vinkel.

b) Linien fra Brændpunktet til 2 Tangenters Skjæringspunkt halverer Vinklen mellem Brændstraalerne til Røringspunkterne.

c) Linien fra Brændpunktet til 2 Tangenters Skjæringspunkt er Mellemproportional mellem Brændstraalerne til Røringspunkterne.

76. Konstruer en Parabel af 2 Tangenter og deres Røringspunkter.

77. Konstruer en Parabel af Axens Retning og 3 Tangenter.

78. I Trekanten ABC ligger D paa Siden AB. Der er givet: $\angle C$, $CD = k$, $AD = p$, $BD = q$. Hvorledes bestemmes $\angle CDA = v$?

Ex. $C = 45°$, $k = 3$, $p = 1$, $q = 2$.

79. I et Parallelogram er givet Siderne og Diagonalernes Vinkel. Find Parallelogrammets Vinkel.

80. I Trekanten ABC ere Højdefodpunkterne α, β og γ. Der er givet: $\frac{B\alpha}{C\alpha} = -2$ og $\frac{C\beta}{A\beta} = -\frac{3}{2}$.

Bestem Trekantens Vinkler og konstruer Trekanten.

81. Søg den største og mindste Værdi af Størrelsen $3 \sin x + 4 \cos x$ samt de tilsvarende Værdier af x.

82. Hvor mange Værdier har Størrelsen:

$$x = u + v = \sqrt[5]{362 + 209\sqrt{3}} + \sqrt[5]{362 - 209\sqrt{3}}$$

naar uv skal være reel? Den Ligning, hvis Rødder ere disse Værdier af x, har én rational Rod. Bestem denne og bring derved de reelle Værdier af u og v paa Formen $a \pm \sqrt{b}$.

83. Hvorledes kan man strax uden Regning paa Papiret nedskrive Rødderne i Ligningerne:

$$x - ay + a^2 z = a^3,$$
$$x - by + b^2 z = b^3,$$
$$x - cy + c^2 z = c^3.$$

84 En Mand har sin Formue staaende paa Rente og Rentes Rente til 8 pCt. p. A. Hvert Aar hæver han kun $\frac{3}{4}$ af Renten og lader det øvrige lægge til Kapitalen. Den hævede Rente forærer han stadig sin Søn, der anbringer den i en Forretning, der hvert Aar medfører et Tab af 1 Procent. Hvor længe varer det, inden Fader og Søn eje ligemeget?

85. En Mand betaler ved Slutningen af hvert Aar $\frac{1}{10}$ af det, som hans Gjæld ved det Tidspunkt beløber sig til. Hvor længe vil det vare, inden Gjælden bliver saa lille, at han kan afbetale den ved i de næste 5 Aar at udbetale hvert Aar $\frac{1}{8}$ af den oprindelige Gjæld?

86. Hvorledes kan man direkte uden Regning indse, at det Antal Aar, i hvilke man maa indskyde en Sum i en Sparekasse for dernæst i lige saa mange Aar at kunne hæve den dobbelte Sum, er lig det Antal Aar, i hvilke man maa indskyde en Sum, naar den opsparede Kapital dernæst skal være i Stand til at give

den samme Sum i aarlig Rente? Hvorledes kan endvidere det søgte Antal Aar bestemmes uden Anvendelse af Annuitetsformlen?

87. En Kegle er begrænset af en Omdrejningskegleflade og en Plan, der afskjærer Stykket R paa Keglefladens Axe og danner Vinklen v med Axen. Find Keglens Rumfang.

88. Hvor langt maa et Punkt ligge fra en Cirkels Centrum, naar dets Potens med Hensyn til Cirklen skal være lig Arealet af den i Cirklen indskrevne regelmæssige Sexkant.

MINDRE MEDDELELSER.

Wilsons Sætning kan paa følgende Maade bevises ved Hjælp af Fermat's.

Sætter man i $f(x) = x^{p-1} - 1$ efterhaanden $x = 1, 2, 3$ o. s. v., saa fremkommer der en Differensrække af Ordenen $p - 1$, hvis $(p - 1)$'te Differens altsaa er konstant lig $[p - 1]$. De enkelte Led i denne Række give, naar p er et Primtal, allesammen ved Division med p Resten 0, undtagen de, for hvilke selve x er et Multiplum af p, hvilke give Resten $- 1$. Følgelig ville de forskjellige Differenser i den oprindelige Række blive kongruente med de tilsvarende Differenser, dannede af en Række, hvor til Argumenterne

	0	1	2 . . .	p,	$p+1$ . . .	$2p$	. . .
svare	-1	0	0 . . .	-1,	0 . . .	-1	. . .

Det ses øjeblikkelig heraf, at for $n < p$ er $\Delta^n f(0) \equiv (-1)^{n+1}$, og altsaa er for $n = p - 1$ ogsaa $\Delta^{p-1} f(0) = [p - 1] \equiv - 1$. q. e. d.

(J. G.)

Fig. 1.

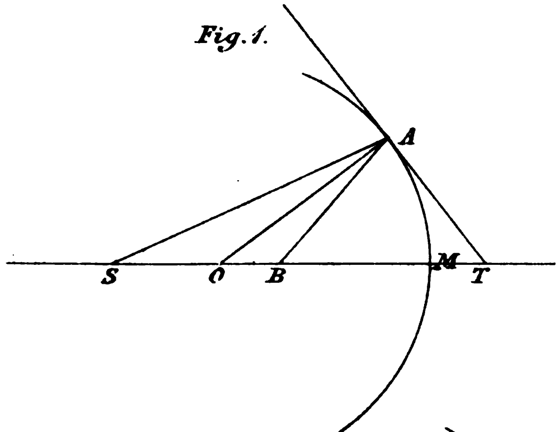


Fig. 2.

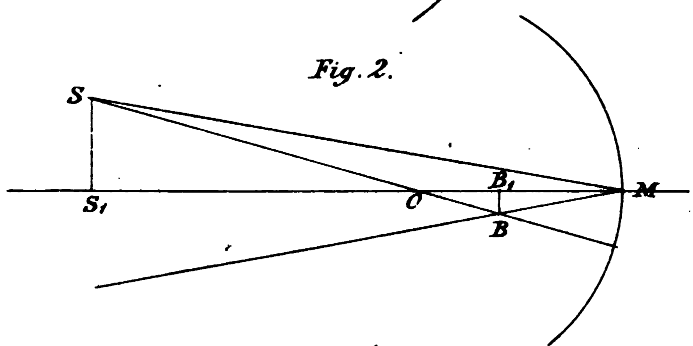


Fig. 3.

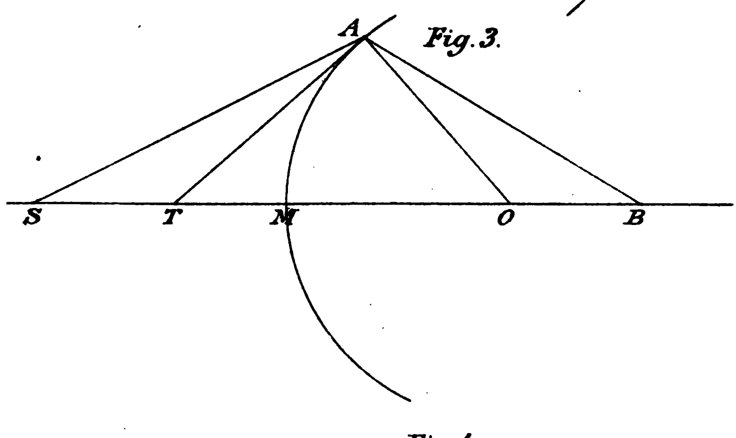
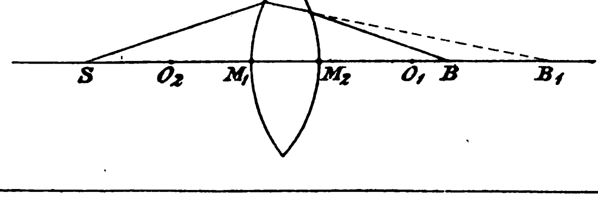


Fig. 4.



Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von | Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

Femte Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1887.

ANDET HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Linnésgade 16, A, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

HÄRLEDNING AF ADDITIONSTEOREMEN FÖR NÅGRA ELLIPTISKA INTEGRALER.

(af Ol. Olsson).

1. Om variablerna ψ, φ, μ äro så beskaffade, att de ständigt uppfylla vilkoret

$$\cos\mu = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\,\Delta\mu, \tag{1}$$

$$\Delta\mu = \sqrt{1 - k^2\sin^2\mu},$$

så gäller också integrallikheten

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi} + \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\Delta\mu}. \tag{2}$$

Giltigheten af denna ekvation, hvilken utgör det analytiska uttrycket af d. s. k. additionsteoremet för de elliptiska integralerna af första slaget, förutsätta vi som bevisad, och med denna förutsättning som utgångspunkt skola vi framställa en deduktion af motsvarande teorem för de elliptiska integralerna af andra slaget samt ock härleda det analoga teoremet för några andra integraler, fallande under samma klass som de elliptiska.

2. För att verkställa deduktionen af additionsteoremet för de elliptiska integralerna af andra slaget, göra vi den observationen, att man har identiskt

$$k\frac{\sin^2\tau}{\Delta\tau} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\Delta\tau} - \Delta\tau\right),$$

och i följd häraf jemväl

$$\int_0^\psi k\frac{\sin^2\psi}{\Delta\psi}\,d\psi + \int_0^\varphi k\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi - \int_0^\mu k\frac{\sin^2\mu}{\Delta\mu}\,d\mu =$$

$$\frac{1}{k}\left(\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi} + \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^\mu \frac{d\mu}{\Delta\mu}\right) -$$

$$\frac{1}{k}\left(\int_0^\psi \Delta\psi\,d\psi + \int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi - \int_0^\mu \Delta\mu\,d\mu\right),$$

eller på grund af (2):

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\psi} k\frac{\sin^2\psi}{\Delta\psi}\,d\psi + \int_0^{\varphi} k\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi - \int_0^{\mu} k\frac{\sin^2\mu}{\Delta\mu}\,d\mu = \\ -\frac{1}{k}\left(\int_0^{\psi}\Delta\psi\,d\psi + \int_0^{\varphi}\Delta\varphi\,d\varphi - \int_0^{\mu}\Delta\mu\,d\mu\right).\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Wi betrakta nu modulen k som variabel och en af amplituderna, μ t. ex., som funktion häraf; sedan sätta vi

$$\int_0^{\psi}\Delta\psi\,d\psi + \int_0^{\varphi}\Delta\varphi\,d\varphi - \int_0^{\mu}\Delta\mu\,d\mu = f(k, \psi, \varphi, \mu) \quad (4)$$

och derivera denna ekvation med afseende på k, hvarvid erhålles

$$\int_0^{\psi} k\frac{\sin^2\psi}{\Delta\psi} + \int_0^{\varphi} k\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^{\mu} k\frac{\sin^2\mu}{\Delta\mu} = -\Delta\mu\frac{d\mu}{dk} - \frac{df}{dk}.$$

Jemför man detta resultat med ekvation (3), får man

$$k\frac{df}{dk} - f + k\Delta\mu\frac{d\mu}{dk} = 0;$$

men ur likheten (1) erhålles

$$\Delta\mu\frac{d\mu}{dk} = -\sin\psi\sin\varphi\, k\left(\sin\mu + k\cos\mu\frac{d\mu}{dk}\right), \quad (5)$$

hvadan $$\frac{k\frac{df}{dk} - f}{k^2} - \sin\psi\sin\varphi\left(\sin\mu + \cos\mu\, k\frac{d\mu}{dk}\right) = 0,$$

och genom integration häraf:

$$\frac{1}{k} f(k, \psi, \varphi, \mu) - k\sin\psi\sin\varphi\sin\mu = C.$$

För att bestämma integrationskonstanten göra vi $\mu = 0$, och få då

$$C = \frac{1}{k} f(k, \psi, \varphi, 0);$$

men (1) ger i detta speciela fall $\varphi + \psi = 0$, och i följd häraf ekvation (4)

$$f(k, \psi, \varphi, 0) = 0; \text{ altså } C = 0.$$

Wi erhålla följaktligen

$$\int_0^{\psi}\Delta\psi\,d\psi + \int_0^{\varphi}\Delta\varphi\,d\varphi = \int_0^{\mu}\Delta\mu\,d\mu + k^2\sin\psi\sin\varphi\sin\mu. \quad (6)$$

Detta är additionsteoremet för de elliptiska integralerna af andra slaget.

3. Återgå vi nu till ekvation (3) och kombinera den samma med (6), få vi

$$\int_0^{\psi}\frac{\sin^2\psi}{\Delta\psi}\,d\psi+\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\mu}\frac{\sin^2\mu}{\Delta\mu}\,d\mu-\sin\psi\sin\varphi\sin\mu, \tag{7}$$

och om vi från (2) subtrahera den sista likheten,

$$\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\psi}{\Delta\psi}\,d\psi+\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\mu}\frac{\cos^2\mu}{\Delta\mu}\,d\mu+\sin\psi\sin\varphi\sin\mu, \tag{8}$$

d. ä. additionsteoremen för integraler af formerna

$$\int_0^{\tau}\frac{\sin^2\tau}{\Delta\tau}\,d\tau,\quad \int_0^{\tau}\frac{\cos^2\tau}{\Delta\tau}\,d\tau.$$

4. Widare skola vi härleda additionsteoremet för integraler af utseendet

$$\int_0^{\tau}\frac{\sin^2\tau\cos^2\tau}{\Delta^3\tau}\,d\tau.$$

Låtom oss för den skull derivera den sista ekvationen med afseende på k! Wi få

$$\int_0^{\psi}\frac{\sin^2\psi\cos^2\psi}{\Delta^3\psi}\,d\psi+\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3\varphi}\,d\varphi-\int_0^{\mu}\frac{\sin^2\mu\cos^2\mu}{\Delta^3\mu}\,d\mu=$$

$$-\left(\frac{\cos^2\mu}{\Delta\mu}+\sin\psi\sin\varphi\cos\mu\right)\frac{1}{k}\frac{d\mu}{dk},$$

men af (5) erhålla vi

$$\frac{d\mu}{dk}=-\frac{k\sin\psi\sin\varphi\sin\mu}{k^2\sin\psi\sin\varphi\cos\mu+\Delta\mu}, \tag{9}$$

eller, emedan på grund af (1)

$$\sin\psi\sin\varphi\cos\mu=(\cos\psi\cos\varphi\cos\mu-\cos^2\mu)\frac{1}{\Delta\mu}, \tag{10}$$

$$\frac{d\mu}{dk}=-\frac{k\sin\psi\sin\varphi\sin\mu}{k^2\cos\psi\cos\varphi\cos\mu+k_1^2}\cdot\Delta\mu, \tag{11}$$

(k_1 = kompl. modul).

Med stöd af (10) och (11) erhåller man slutligen

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\psi \frac{\sin^2\psi\cos^2\psi}{\Delta^3\psi}\,d\psi + \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3\varphi}\,d\varphi = \\ \displaystyle\qquad \int_0^u \frac{\sin^2\mu\cos^2\mu}{\Delta^3\mu}\,d\mu + \frac{\sin\psi\cos\psi\sin\varphi\cos\varphi\sin\mu\cos\mu}{k^2\cos\psi\cos\varphi\cos\mu + k_1^2}\end{array}\right\}(12)$$

5. Om vi uti den sista ekvationen tilldela amplituden μ det speciela värdet $\mu = \frac{\pi}{2}$, öfvergår den till formen

$$\int_0^\psi \frac{\sin^2\psi\cos^2\psi}{\Delta^3\psi}\,d\psi + \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3\varphi}\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\mu\cos^2\mu}{\Delta^3\mu}\,d\mu, \quad (13)$$

under det att sambandet mellan ψ och φ blir

$$tg\,\psi\; tg\,\varphi = \frac{1}{k_1}, \quad (14)$$

En fullkomligt liknande form antager äfven ekvation (2), då man deri tilldelar μ samma värde; nemligen

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi} + \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\mu}{\Delta\mu}. \quad (15)$$

Som sålunda integralerna

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi}, \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

och
$$\int_0^\psi \frac{\sin^2\psi\cos^2\psi}{\Delta^3\psi}\,d\psi, \quad \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3\varphi}\,d\varphi,$$

äro så beskaffade, att deras summa är lika med de kompletta integralerna

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\mu}{\Delta\mu}\,d\mu, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\mu\cos^2\mu}{\Delta^3\mu}\,d\mu,$$

så skulle man om de samma kunna säga, att de på visst sätt utgöra hvarandras »komplement«.

Denna kompletteringsegenskap tillkommer dock icke endast dessa tvänna integraler, utan det finnas tvärtom en hel klass, som besitta den samma, nämligen alla som äro inbegripna i uttrycket

$$\int_0^{\tau} F\left(\frac{\sin\tau\cos\tau}{\Delta\tau}\right)\frac{d\tau}{\Delta\tau},$$

(F en funktion hvilken som helst),
och hvaraf de två nyssbehandlade äro blott enskilda fall. Detta låter utan svårighet visa sig.

Om vi nämligen differentiera (15) — k hålles denna gång konstant — få vi

$$\frac{d\psi}{\Delta\psi} = -\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \tag{16}$$

men ekvation (14) ger

$$\sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi},\quad \sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\Delta\varphi},$$

hvaraf
$$\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta\psi} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi},$$

och följaktligen äfven

$$F\left(\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta\psi}\right) = F\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right).$$

Om man nu med faktorn (16) förlänger denna identitet, kommer man till differentialekvationen

$$F\left(\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta\psi}\right)\frac{d\psi}{\Delta\psi} = F\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

och om man integrerer mellan gränserna $\psi = 0$, $\psi = \psi$, hvilka svara mot $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \varphi$, får man slutligen likheten

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\psi} F\left(\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta\psi}\right)\frac{d\psi}{\Delta\psi} + \int_0^{\varphi} F\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{\sin\mu\cos\mu}{\Delta\mu}\right)\frac{d\mu}{\Delta\mu}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Man kan på geometrisk väg erhålla en klar föreställning af variationen hos och det ömsesidiga förhållandet mellan gränserna i denna ekvation. De kunna nämligen, för så vidt de sjelfva så väl som modulen äro reela samt dessutom $k < 1$, framställas genom ett par vinklar hos ellipsen. Man finner nämligen, att de repre-

senteras utaf den excentriska anomalien och den motsvarande vektorialvinkelns komplement hos en ellips, hvars excentricitet är k.

7. Göra vi i ekvation (17) $\psi = \varphi$, få vi — med användande af (14) —

$$\int_0^{\operatorname{arc} \cot \sqrt{k}} F\left(\frac{\sin \mu \cos \mu}{\Delta \mu}\right) \frac{d\mu}{\Delta \mu} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{\sin \mu \cos \mu}{\Delta \mu}\right) \frac{d\mu}{\Delta \mu}, \tag{18}$$

d. ä. den lag, enligt hvilken integralen

$$J\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{\sin \mu \cos \mu}{\Delta \mu}\right) \frac{d\mu}{\Delta \mu}$$

tudelas.

För t. ex. $k = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, blir $J\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} J\left(\frac{\pi}{2}\right)$,

$k = 2\sqrt{2}\, i$, — $J\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} J\left(\frac{\pi}{2}\right)$,

o. s. v.

8. I fråga om integraler, hvilkas amplituder variera i öfverensstämmelse med ekvationen

$$tg\, \psi\, tg\, \varphi = \frac{1}{k_1}, \tag{19}$$

skola vi härleda ännu ett par likheter.

Genom logaritmering af (19) samt förlängning med faktorn

$$\frac{d\psi}{\Delta \psi} = - \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$$

erhålla vi

$$\frac{l\, tg\, \psi}{\Delta \psi} d\psi = \frac{l\, tg\, \varphi}{\Delta \varphi} d\varphi - l \frac{1}{k_1} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta \varphi},$$

$$\frac{l\, tg\, \varphi}{\Delta \varphi} d\varphi = \frac{l\, tg\, \psi}{\Delta \psi} d\psi - l \frac{1}{k_1} \cdot \frac{d\psi}{\Delta \psi},$$

och om vi integrera samt sedan subtrahera de uppkommande resultaten:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l\, tg\, \mu}{\Delta \mu} d\mu = \frac{1}{2} K l \frac{1}{k_1}, \tag{20}$$

(K = den komplette ellipt. integr. af 1sta slaget).

$$\int_0^{\psi}\frac{l\,tg\,\psi}{\Delta\psi}\,d\psi-\int_0^{\varphi}\frac{l\,tg\,\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{2}\,l\,\frac{1}{k_1}\left(\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}-\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\right). \tag{21}$$

Observerar man vidare, att man på grund (19) har

$$\Delta\psi\,.\,\Delta\varphi=k_1,$$

så erhåller man på enahanda sätt relationerna

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{l\Delta\mu}{\Delta\mu}\,d\mu=\frac{1}{2}\,Klk_1, \tag{22}$$

$$\int_0^{\psi}\frac{l\Delta\psi}{\Delta\psi}\,d\psi-\int_0^{\varphi}\frac{l\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{2}\,lk_1\left(\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}-\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\right). \tag{23}$$

9. Widare skola vi söka formen af additionsteoremet för integralerna

$$\int_0^{\tau}\frac{sin^{2n}\,\tau}{\Delta^{2n+1}\,\tau}\,d\tau.$$

(n = helt positivt tal).

Man kan visserligen erhålla det samma ur ekvationen (2) genom n upprepade derivationer med afseende på k, men såväl deduktionen som och sjelfva resultatet blir af något enklare form, om man genom att sätta

$$k^2=\varkappa$$

inför en ny modul $\varkappa$ och sedan verkställer derivationen med afseende på denna.

Begagnar man beteckningen

$$\Delta_1\tau=\Delta_1(\varkappa,\tau)=\sqrt{1-\varkappa\,sin^2\,\tau},$$

får man nemligen dervid:

$$D^n_{\varkappa}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta_1\psi}=\frac{1}{2^n}\prod_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)\int_0^{\psi}\frac{sin^{2n}\,\psi}{\Delta_1^{2n+1}\,\psi}\,d\psi,$$

$$D^n_{\varkappa}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta_1\varphi}=\frac{1}{2^n}\prod_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)\int_0^{\varphi}\frac{sin^{2n}\,\varphi}{\Delta^{2n+1}\,\varphi}\,d\varphi,$$

samt

$$D_x^n \int_0^\mu \frac{d\mu}{\Delta_1 \mu} = \frac{1}{2^n} \prod_{\nu=1}^{n} (2\nu - 1) \int_0^\mu \frac{\sin^{2n}\mu}{\Delta_1 \mu} d\mu +$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^{\nu-1}} \prod_{\rho=0}^{\nu-1} (2\rho - 1)\, D_x^{n-\nu} \left(\frac{\sin^{2(\nu-1)}\mu}{\Delta_1^{2\nu-1}\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} \right),$$

då vi låta tecknet $\prod_{\rho=0}^{0} (2\rho - 1)$ betyda $+ 1$;

Men emedan vi på grund af (1) hafva

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{2} \sin\psi \sin\varphi\, \Delta_1 \mu\, f(x, \mu),$$

der
$$f(x, \mu) = \frac{\sin \mu}{x \cos\psi \cos\varphi \cos\mu + 1 - x},$$

kunna vi skrifva

$$D_x^n \int_0^\mu \frac{d\mu}{\Delta\mu} = \frac{1}{2^n} \prod_{\nu=1}^{n} (2\nu - 1) \int_0^\mu \frac{\sin^{2n}\mu}{\Delta_1^{2n+1}\mu} d\mu -$$

$$\sin\psi \sin\varphi \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^\nu} \prod_{\rho=0}^{\nu-1} (2\rho - 1)\, D_x^{n-\nu} \left[\left(\frac{\sin\mu}{\Delta_1 \mu} \right)^{2(\nu-1)} \cdot f(x, \mu) \right].$$

Med stöd af dessa ekvationer erhåller man slutligen

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\psi \frac{\sin^{2n}\psi}{\Delta^{2n+1}\psi} d\psi + \int_0^\varphi \frac{\sin^{2n}\varphi}{\Delta^{2n+1}\varphi} d\varphi = \int_0^\mu \frac{\sin^{2n}\mu}{\Delta^{2n+1}\mu} d\mu - \\ &\frac{\sin\psi \sin\varphi}{\prod_{\nu=1}^{n} (2\nu - 1)} \Big|_{x=k^2} \sum_{\nu=1}^{n} 2^{n-\nu} \prod_{\rho=0}^{\nu-1} (2\rho - 1)\, D_x^{n-\nu} \\ &\qquad\qquad \left[\left(\frac{\sin\mu}{\Delta_1 \mu} \right)^{2(\nu-1)} \cdot f(x, \mu) \right]. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

10. Till sist skola vi härleda additionsteoremen för ännu ett par integraler, nemligen de af formen

$$\int_0^\tau \frac{\sin^{2n}\tau}{\Delta\tau} d\tau, \quad \int_0^\tau \frac{\cos^{2n}\tau}{\Delta\tau} d\tau,$$

(n = helt positivt tal).

Wid denna härledning skola vi stödja oss på följande för de elliptiska integralerna af tredje slaget gällande likheter:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(1+\lambda\, sin^2\,\psi)\,\varDelta\psi}+\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+\lambda\, sin^2\,\varphi)\,\varDelta\varphi}= \\ &\qquad\int_0^{\mu}\frac{d\mu}{(1+\lambda\, sin^2\,\mu)\,\varDelta\mu}+\int_0^{q}\frac{Q_1\lambda\, dq}{\lambda^2+Q_2\lambda+Q_3}, \end{aligned}\right\}(25)$$

der

$$\begin{aligned} q &= sin\,\psi\; sin\,\varphi, \\ Q_1 &= sin\,\mu\, q^{-2}, \\ Q_2 &= 1+q^{-2}-(cos\,\mu+q\varDelta\mu)^2\, q^{-2}, \\ Q_3 &= q^{-2}, \end{aligned}$$

samt

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(1+\lambda\, cos^2\,\psi)\,\varDelta\psi}+\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+\lambda\, cos^2\,\varphi)\,\varDelta\varphi}= \\ &\qquad\int_0^{\mu}\frac{d\mu}{(1+\lambda\, cos^2\,\mu)\,\varDelta\mu}-\int_0^{q}\frac{Q'_1\lambda\, dq}{\lambda^2+Q'_2\lambda+Q'_3}, \end{aligned}\right\}(26)$$

der

$$\begin{aligned} Q'_1 &= sin\,\mu\,(cos\,\mu+q\varDelta\mu)^{-2}, \\ Q'_2 &= 1+(1-q^2)\,(cos\,\mu+q\varDelta\mu)^{-2}, \\ Q'_3 &= (cos\,\mu+q\varDelta\mu)^{-2}. \end{aligned}$$

De sista integralerna i (25) och (26) kunne äfven skrifvas under följande form:

$$\left.\begin{aligned} J &= \int_0^{q}\frac{Q_1\lambda\, dq}{\lambda^2+Q_2\lambda+Q_3}= \\ &\qquad\int_0^{q}\frac{Q_1\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\,\frac{dq}{\lambda-\lambda_1}-\int_0^{q}\frac{Q_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\,\frac{dq}{\lambda-\lambda_2}, \end{aligned}\right\}(27)$$

$$\left.\begin{aligned} J &= \int_0^{q}\frac{Q'_1\lambda\, dq}{\lambda^2+Q'_2\lambda+Q'_3}= \\ &\qquad\int_0^{q}\frac{Q'_1\lambda'_1}{\lambda'_1-\lambda'_2}\,\frac{dq}{\lambda-\lambda'_1}-\int_0^{q}\frac{Q'_1\lambda'_2}{\lambda'_1-\lambda'_2}\,\frac{dq}{\lambda-\lambda'_2}, \end{aligned}\right\}(28)$$

då λ_1, λ_2 och λ'_1, λ'_2 beteckna rötterna till resp.

$$\lambda^2 + Q_2\lambda + Q_3 = 0$$

och

$$\lambda^2 + Q'_2\lambda + Q'_3 = 0.$$

Den i dessa ekvationer ingående kvantiteten λ är en arbiträr parameter, oberoende såväl af modulen som af amplituderna; om vi derföre med afseende på den samma derivera (27) och (28) samt sedan göra $\lambda = 0$, erhålla vi följande resultat:

$$I^{\lambda=0} D_\lambda^n J = (-1)^n n!\, I^{\lambda=0} \left[\int_0^q \frac{Q_1\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{dq}{(\lambda - \lambda_1)^{n+1}} - \int_0^q \frac{Q_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{dq}{(\lambda - \lambda_2)^{n+1}}\right] - n! \int_0^q \frac{Q_1}{Q_3^n} \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} dq;$$

$$I^{\lambda=0} D_\lambda^n J' = (-1)^n n!\, I^{\lambda=0} \left[\int_0^q \frac{Q'_1\lambda'_1}{\lambda'_1 - \lambda'_2} \frac{dq}{(\lambda - \lambda'_1)^{n+1}} - \int_0^q \frac{Q'_1\lambda'_2}{\lambda'_1 - \lambda'_2} \frac{dq}{(\lambda - \lambda'_2)^{n+1}}\right] - n! \int_0^q \frac{Q'_1}{Q'^n_3} \frac{\lambda'^n_1 - \lambda'^n_2}{\lambda'_1 - \lambda'_2} dq.$$

Om vi vidare derivera (25) och (26) med afseende på samma kvantitet och sedan använda oss af de två sista resultaten, erhålla vi slutligen ekvationerna

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\psi \frac{\sin^{2n}\psi}{\varDelta\psi} d\psi + \int_0^\varphi \frac{\sin^{2n}\varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi = \\ &\qquad \int_0^\mu \frac{\sin^{2n}\mu}{\varDelta\mu} d\mu + (-1)^n \int_0^q \frac{Q_1}{Q_3^n} \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} dq. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\psi \frac{\cos^{2n}\psi}{\varDelta\psi} d\psi + \int_0^\varphi \frac{\cos^{2n}\varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi = \\ &\qquad \int_0^\mu \frac{\cos^{2n}\mu}{\varDelta\mu} d\mu - (-1)^n \int_0^q \frac{Q'_1}{Q'^n_3} \frac{\lambda'^n_1 - \lambda'^n_2}{\lambda'_1 - \lambda'_2} dq. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Beträffande karaktären af integralerna $I^{\lambda=0} D_\lambda^n J$, $I^{\lambda=0} D_\lambda^n J'$, så finna vi, att de äro h e l a, r a t i o n e l a funktioner af $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\mu$, $\cos\mu$.

Wi hafva nämligen

$$\frac{Q_1}{Q_3^n} = \sin \mu \; q^{2(n-1)};$$

och
$$\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{Q} [(Q_2 + Q)^n - (Q_2 - Q)^n],$$

då vi sätta
$$Q = (Q_2^2 - 4 Q_3)^{\frac{1}{2}};$$

eller

$$\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{n}{1} Q_2^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} Q_2^{n-3} Q^2 + \ldots + Q^{n-1} \right],$$

då n är ett udda tal,

samt

$$\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{n}{1} Q_2^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} Q_2^{n-3} Q^2 + \ldots + n Q_2 Q^{n-2} \right],$$

då n är ett jemt tal;

hvadan
$$\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{H(q)}{q^{2(n-1)}},$$

der H betecknar en hel, rational funktion.

Följaktligen blifver jemväl $I^{\lambda=0} D_\lambda^n J$ en hel rational funktion med afseende på q.

Men utom q, d. v. s. $\sin \psi \sin \varphi$, ingår dessutom i funktionen på helt, rationelt sätt $\sin \mu$, $\cos \mu$, och $\Delta\mu$, men som $\Delta\mu$, så snart det förekommer, ingår vid sidan af q, och på grund af (1)

$$q \Delta\mu = \cos \psi \cos \varphi - \cos \mu,$$

så kunna vi säga, att integralen $I^{\lambda=0} D_\lambda^n J$ altid låter framställa sig såsom en hel, rationel funktion af $\sin \psi$, $\cos \psi$, $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin \mu$, $\cos \mu$.

Det samma skall man också finna vara förhållandet med $I^{\lambda=0} D_\lambda^n J'$, så att vi slutligen kunna skrifva

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\psi \frac{\sin^{2n} \psi}{\Delta\psi} d\psi + \int_0^\varphi \frac{\sin^{2n} \varphi}{\Delta\varphi} d\varphi = \\ &\quad \int_0^\mu \frac{\sin^{2n} \mu}{\Delta\mu} d\mu + H_1 (\sin \psi, \cos \psi, \sin \varphi, \cos \varphi, \sin \mu, \cos \mu), \end{aligned}\right\} (31)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\psi}\frac{\cos^{2n}\psi}{\Delta\psi}\,d\psi+\int_0^{\varphi}\frac{\cos^{2n}\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi=\\ \qquad\displaystyle\int_0^{\mu}\frac{\cos^{2n}\mu}{\Delta\mu}\,d\mu+H_2\,(\sin\psi,\cos\psi,\sin\varphi,\cos\varphi,\sin\mu,\cos\mu).\end{array}\right\}(32)$$

OM TRANSFORMATIONER AF DEN BINOME LIGNING.

(AF J. P. GRAM.)

Den binome Ligning $z^n + C = 0$ har den Egenskab, at den kan opløses ved en enkelt Roduddragning. Det samme maa være Tilfældet med enhver Ligning, som ved en lineær Transformation fremgaar af hin. Sætte vi nemlig

$$z = \frac{\varkappa x + \lambda}{px + r},$$

saa faas den nye Ligning

$$(\varkappa x + \lambda)^n + C(px + \nu)^n = 0,$$

eller, om man vil,

$$A\,(x + \zeta_1)^n + B\,(x + \zeta_2)^n = 0. \tag{1}$$

Denne Ligning opløses simpelthen ved først at danne Ligningen

$$\frac{x + \zeta_1}{x + \zeta_2} = 1^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{-\frac{B}{A}}$$

og deraf bestemme x.

Ligningen (1) kan betragtes som Normalform for alle de Ligninger, som ved en lineær Transformation kunne omdannes til binome; det ses at venstre Side i enhver saadan skal kunne skrives som en Sum af to n'te Potenser af lineære Udtryk i x.

Det er let at angive de nødvendige Betingelser, som en forelagt Lignings Koefficienter maa tilfredsstille, for at den skal kunne bringes paa Formen (1). Betingelserne udtrykkes simplest, naar Ligningen skrives med Binomialkoefficienter som

$$f(x) = a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \dots \left. \begin{matrix} \\ \frac{n}{1} a_{n-1} x + a_n = 0. \end{matrix} \right\} \quad (2)$$

Da faas nemlig ved Sammenligning med (1)

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = A + B, \\ a_1 = A\zeta_1 + B\zeta_2, \\ a_2 = A\zeta_1^2 + B\zeta_2^2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_i = A\zeta_1^i + B\zeta_2^i. \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (3)$$

Eliminerer man mellem tre paa hinanden følgende af disse Ligninger Konstanterne A og B tilligemed de fælles Potenser af ζ_1 og ζ_2; saa faas et System af Ligninger af Formen

$$\begin{vmatrix} a_i & 1 & 1 \\ a_{i+1} & \zeta_1 & \zeta_2 \\ a_{i+2} & \zeta_1^2 & \zeta_2^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Disse udtrykke, at der mellem tre paa hinanden følgende Koefficienter bestaar en lineær Relation

$$Pa_i + Qa_{i+1} + Ra_{i+2} = 0, \quad (5)$$

og at den samme Relation bestaar mellem tre sukcessive Potenser af ζ_1 og ζ_2, saa at ζ_1 og ζ_2 ere Rødderne i Ligningen

$$P + Q\zeta + R\zeta^2 = 0. \quad (6)$$

Af (5) følger atter ved Elimination af $P : Q : R$, at alle Determinanterne, dannede af 3 vilkaarlige Piller i Systemet

$$D \equiv \left\| \begin{array}{l} a_0 \; a_1 \; a_2 \dots a_i \; \dots a_{n-2} \\ a_1 \; a_2 \; a_3 \dots a_{i+1} \dots a_{n-1} \\ a_2 \; a_3 \; a_4 \dots a_{i+2} \dots a_n \end{array} \right\| \quad (7)$$

forsvinde.

Disse Betingelser udtrykke netop, at der mellem Koefficienterne bestaar den rekurrente Forbindelse (5), og afgive altsaa nødvendige Betingelser for, at Ligningen (2) kan bringes paa Formen (1). Derimod kunne de ikke ogsaa siges at være tilstrækkelige.

Ligningen (5) kan nemlig opfattes som en Differensligning, tjenende til Bestemmelsen af den almindelige Form af Koeffici-

enterne a. For saa vidt Rødderne i (6) ere forskjellige, vil da det almindelige Integral af (5) netop blive

$$a_i = A\zeta_1^i + B\zeta_2^i,$$

hvor A og B ere vilkaarlige Konstanter. Dette kan let ses ved i Stedet for (5) at benytte (4), der efter Bortdivision af $(\zeta_2 - \zeta_1)$ kan skrives

$$a_i\zeta_1\zeta_2 - a_{i+1}(\zeta_1 + \zeta_2) + a_{i+2} = 0 \tag{8}$$

og tilsteder en simpel sukcessiv Bestemmelse af a_2, a_3 o. s. v., idet man begynder med for a_0 og a_1 at sætte henholdsvis $A + B$ og $A\zeta_1 + B\zeta_2$, hvilket er tilladt, naar $\zeta_1 - \zeta_2$ er forskjellig fra 0. Under denne Forudsætning føre altsaa Betingelserne $D = 0$ tilbage til Formen (1) for den forelagte Ligning. Transformationen sker simpelthen ved mellem (6) og to af Ligningerne (5) at eliminere $P : Q : R$. Man faar da en Ligning af 2den Grad til Bestemmelsen af ζ_1 og ζ_2. Som saadan kan f. Ex benyttes

$$\left.\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 1 \\ a_1 & a_2 & z \\ a_2 & a_3 & z^2 \end{vmatrix} = \\ (a_0 a_2 - a_1^2) z^2 - (a_0 a_3 - a_1 a_2) z + (a_1 a_3 - a_2^2). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Efter Opløsningen af denne findes A og B af Ligningerne

$$A + B = a_0,$$
$$A\zeta_1 + B\zeta_2 = a_1,$$

hvorefter

$$A = \frac{a_0\zeta_2 - a_1}{\zeta_2 - \zeta_1}, \quad B = \frac{a_0\zeta_1 - a_1}{\zeta_1 - \zeta_2}, \tag{10}$$

og Ligningen kan da uden videre skrives paa Normalformen (1).

Har derimod Ligningen (6) lige Rødder, altsaa $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, saa reduceres samme Ligning til $R\left(\zeta + \frac{Q}{2R}\right)^2 = 0$, altsaa

$$\frac{R}{1} = \frac{Q}{-2\zeta} = \frac{P}{\zeta^2},$$

saa at (5) samtidig ændres til

$$a_i\zeta^2 - 2a_{i+1}\zeta + a_{i+2} = 0.$$

Sættes heri $a_i = b_i\zeta^i$, saa faas

$$0 = b_i - 2b_{i+1} + b_{i+2} = \Delta^2 . b_i,$$

som ikke blot tilfredsstilles for b_i = en konstant, men ogsaa for $b_i = i$, saa at den almindeligste Form, som a_i kan have, nu vil blive

$$a_i = A\,.\,\zeta^i + B\,.\,i\,\zeta^i, \tag{11}$$

hvor A og B ere konstante Størrelser, hvilket ogsaa stemmer med den almindelige Theori for lineære Differensligninger.

Den forelagte Ligning antager i dette Tilfælde altsaa ikke Normalformen (1), men derimod følgende Form,

$$\begin{aligned} f(x) \equiv A\,.\left(x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\zeta + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}\zeta^2 + \ldots \zeta^n\right) \\ + B\left(\frac{n}{1}x^{n-1}\zeta + \frac{n(n-1)}{1}x^{n-2}\zeta^2 + \ldots n\zeta^n\right) \\ = A\,.\,(x+\zeta)^n + n\zeta B\,(x+\zeta)^{n-1} = 0, \end{aligned}$$

eller, om man vil,

$$f(x) \equiv C\,(x+\zeta)^{n-1}\,(x+k) = 0. \tag{12}$$

Den faar altsaa $n - 1$ lige store Rødder. Den flerdobbelte Rod bestemmes, som det ses af det foregaaende, som den fælles Rod i Ligningerne

$$a_i\zeta^2 - 2a_{i+1}\zeta + a_{i+2} = 0,$$

eller ogsaa af (9), medens Faktoren $x + k$ simplest findes derefter ved Division.

Hvis endelig i Ligningen (9) samtlige Koefficienter forsvinde, blive Rødderne ζ fuldstændig ubestemte. Men da haves $\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}$; og det lader sig let godtgjøre, at der i Almindelighed vil bestaa et konstant Forhold mellem to paa hinanden følgende Koefficienter a. Altsaa forsvinder ikke blot Systemet (7) men ogsaa Systemet

$$\left\|\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_n \end{matrix}\right\|,$$

medens venstre Side af Ligningen samtidig reduceres til Formen $A(x+\zeta)^n$, altsaa til en fuldstændig n'te Potens.

Er der f. Ex. forelagt Ligningen

$$f(x) = 2x^6 - 6x^5 + 20x^3 - 30x^2 + 18x - 4 = 0,$$

saa omskrives denne ved Indførelse af Binomialkoefficienter først til

$$2x^6 - 6.1x^5 + 15.0x^4 + 20.1x^3 - 15.2x^2 + 6.3x - 4 = 0,$$

hvorefter undersøges, om Determinantsystemet

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{array} \right\|$$

forsvinder identisk. Dette viser sig at være Tilfældet, altsaa henhører Ligningen til den betragtede Art og er enten binom eller har 5 lige Rødder. Dannes dernæst Ligningen

$$0 = \left| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & z \\ 0 & 1 & z^2 \end{array} \right| = -z^2 - 2z - 1,$$

saa viser det sig, at denne har to lige Rødder $\zeta = -1$. Den forelagte Ligning kan altsaa skrives under Formen

$$2(x-1)^5(x+k) = 0,$$

og en Sammenligning af den første og sidste Koefficient i dette Udtryks udviklede Form med selve Ligningen viser strax, at $k = 2$, saa at

$$f(x) = 2(x-1)^5(x+2),$$

hvilket ogsaa er rigtigt.

Et Exempel paa det første Alternativ (Reduktion til Formen (1)) afgiver den almindelige Ligning af 3die Grad. Da der for denne ikke existerer nogen af Determinanterne i Systemet (3), saa kræves der ikke nogen Betingelse for Omdannelsen til Normalformen (1). Denne kan altsaa altid iværksættes ved for $(x + \zeta_1)$ og $(x + \zeta_2)$ at benytte de lineære Faktorer i højre Side af den ved (9) fremstillede Ligning. Denne Løsning af 3die Grads Ligningen, som først er angivet af Cayley, er den, som sædvanlig anføres i Lærebøgerne i nyere Algebra.

Endvidere ses, at naar den kvadratiske Resolvente (9) har lige Rødder, maa 3die Grads Ligningen have to lige store Rødder.

For Ligningen af 4de Grad kræves paa lignende Maade, at Determinanten $\left| \begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \right|$, som er en af Ligningens to Invarianter, maa forsvinde, for at Ligningen skal kunne bringes paa

Formen (1). Den har tre lige Rødder, naar denne Betingelse er opfyldt, og desuden Ligningen (9) faar lige Rødder.

Efter Undersøgelsen af de Ligninger, som ved en lineær Transformation kunne reduceres til binome, burde nu følge en tilsvarende af dem, som dannes af den binome Ligning ved kvadratiske Transformationer. Uden at indlade mig paa en nøjere Drøftelse af disse skal jeg ved denne Lejlighed berøre et specielt Tilfælde, som staar i nøje Forbindelse med et Æmne, der tidligere er behandlet her i Tidsskriftet. I dettes Aarg. 1885 S. 39 har Dr. A. S. Guldberg angivet den almindelige Form af de Ligninger af n'te Grad, hvis Rødder have Formen

$$x = \omega^r \sqrt[n]{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B^n}} + \frac{1}{\omega^r} \sqrt[n]{\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B^n}}, \quad (13)$$

hvor $\omega^n = 1$. Sætter man her $\omega^r \sqrt[n]{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B^n}} = R^{\frac{1}{n}}$,

saa ses let, at man kan sætte

$$x = R^{\frac{1}{n}} + \frac{B}{R^{\frac{1}{n}}}.$$

Transformerer man altsaa Ligningen ved at sætte

$$x = y + \frac{B}{y},$$

saa faas
$$y = R^{\frac{1}{n}} \text{ eller } y^n = R,$$

hvorved den altsaa reduceres til en binom Ligning. Af denne fremgaar atter Ligningen i x ved at sætte

$$y = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - B}. \quad (14)$$

Resultatets Almengyldighed forringes ikke væsentlig, naar man i Stedet for denne sætter

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad (15)$$

idet man fra den kan gaa over til den foregaaende ved for x og y at sætte henholdsvis $\varkappa x$ og λy, hvor $\varkappa$ og λ ere passende valgte Konstanter. Af $y^n = R$ faas da Ligningen

$$(x \pm \sqrt{x^2-1})^n = R.$$

som i udviklet Form kan findes ved at udføre Potensopløftningen paa venstre Side og bagefter bortskaffe Rodstørrelsen $\sqrt{x^2-1}$.

Den derved fremgaaende Ligning i x vil ikke, som det kunde formodes, blive af højere Grad end n. Lettest ses dette ved at bemærke, at Ligningen ogsaa kan dannes ved at sætte

$$((x+\sqrt{x^2-1})^n - R)((x-\sqrt{x^2-1})^n - R) = 0.$$

Men derved faas efter Udførelsen af Multiplikationen

$$1 + R^2 - R((x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n) = 0$$

eller

$$2R(x^n + n_2 x^{n-2}(x^2-1) + n_4 x^{n-4}(x^2-1)^2 + n_6 x^{n-6}(x^2-1)^3 + \ldots) = R^2 + 1,$$

hvor n_2, n_4, n_6 betegne Binomialkoefficienter.

Efter Bortdivision af R kan Ligningen ogsaa skrives

$$\left.\begin{aligned} x^n + n_2 x^{n-2}(x^2-1) + n_4 x^{n-4}(x^2-1)^2 + \ldots \\ = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right). \end{aligned}\right\} (16)$$

Ved Sammenligning med den af Dr. Guldberg anførte Form maa bl. A. det bemærkes, at $2x$ i denne Ligning svarer til x hos Dr. G.

Ligningen, som den her er forelagt, vil altsaa løses ved at sætte

$$2x = y + \frac{1}{y},$$

hvorved den reduceres til en binom Ligning af n'te Grad i y eller rettere sagt til en Ligning af Formen $y^n + y^{-n} = R + \frac{1}{R}$, som atter giver $y^n = R^{\pm 1}$. For imidlertid herved at opnaa et væsentligt Fremskridt med Hensyn til Opløsning af forelagte Ligninger, om hvis Beskaffenhed intet forud var bekjendt, maatte der først angives den almindelige Betingelse, Koefficienterne maatte opfylde, for at Ligningen ved en lineær Transformation kunne omdannes til den i (16) angivne Normalform. Selve Opløsningen vilde da neppe frembyde nogen Vanskelighed.

EXAMENSOPGAVER.

Afgangsexamen for Studerende. Januar 1887.

Arithmetik.

1. Hvilke hele og positive Værdier af x og y tilfredsstille Ligningen

$$\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=14,$$

naar alle Rodstørrelserne skulle have de i Ligningen angivne Fortegn?

Det mindste Par fundne Værdier prøves ved Indsættelse i den givne Ligning.

2. En Mand kjøber 1. Januar 1865 et Stykke af en Byggegrund for 1000 Kr. og 1. Januar 1870 det øvrige for 3000 Kr. Han bortsælger 1. Januar 1875 et Stykke for 8000 Kr. og 1. Januar 1880 det øvrige for 4000 Kr. Hvormange Procent pro Anno har han haft af denne Forretning?

Geometri.

1. En regelmæssig 5-sidet Pyramidestub er omskreven om en Kugle. Radierne i Grundfladernes indskrevne Cirkler ere R og r. Find Stubbens Volumen og hele Overflade.

2. Gjennem et Punkt af en Parabel ere dragne Liniepar, hvis Vinkel halveres af Parablens Normal. Bevis, at Forbindelseslinien mellem et saadant Liniepars andre Skjæringspunkter med Parablen gaar igjennem et fast Punkt. I hvilke Punkter berøres Parablen af Tangenter fra dette Punkt?

Beregningsopgave.

Beregn Overfladen af Tetraedret $ABCD$, naar $\angle\ CAD = 42^0\ 8'\ 16''$, $\angle\ DAB = \angle\ BAC = 57^0\ 19'\ 42''$, $AB = 0{,}5183'$, $BC = BD = 0{,}4958'$, og naar det er givet, at Trekanterne BAC og BAD ikke ere kongruente.

Beregn endvidere de Stykker, hvori Kanten CD deles af AB's Projektion paa Planen CAD.

Projektionstegning.

Tre Punkter a, b, c ere givne, hvert ved sine to Billeder (Projektioner), og ingen af disse Forbindelseslinier er parallel med eller vinkelret paa Grundlinien (Projektionsaxen). Der søges Billederne (Projektionerne) af Skjæringslinien mellem de Kugler med Centrene a og b, som gaa igjennem c, samt det vandrette Spor af en Kegleflade gjennem denne Skjæringslinie og med Toppunkt i det Punkt af den ene Kugle, som er fjernest fra den vandrette Billedplan.

De lærde Skolers Afgangsexamen. Juni 1887.

Arithmetik.

1. Løs Ligningen

$$37\,[x^2 - 2\,(m - 1)\,x + m^2] + 17\,m = 3142$$

med Hensyn til x, og find de hele og positive Værdier af m, for hvilke Rødderne blive reelle hele Tal.

Det bør af Løsningen fremgaa, at den eller de fundne Værdier for m virkelig ere de eneste brugelige.

2. Find en Differensrække med et lige Antal Led, naar dette Antal $2n$, Leddenes Sum s og Forskjellen f mellem Summen af Kvadraterne af Leddene med lige Nummer og Summen af Kvadraterne af Leddene med ulige Nummer ere givne.

Expl. $n = 3$, $s = f = 21$.

Opl. 1. Man finder

$$x = m - 1 \pm \sqrt{\frac{3179 - 91m}{37}}.$$

For at Rødderne skulle være reelle og hele, maa man have, at $3179 - 91m$ er positiv og delelig med 37 og Kvotienten et Kvadrattal. Ligningen

$$91\,m + 37\,n = 3179$$

giver som det eneste positive Rodpar $m = 2$, $n = 81$, hvor n virkelig er et Kvadrattal. $m = 2$ giver $x = \begin{cases} 10 \\ -8. \end{cases}$

2. Idet $a_{2r}^2 - a_{2r-1}^2 = (a_{2r} - a_{2r-1})(a_{2r} + a_{2r-1}) = d(a_{2r} + a_{2r-1})$, hvor d er Differensen, bliver $d = \frac{f}{s}$, hvorefter Opgaven er let.

Beregningsopgave.

1. Find x af Ligningen

$$\cos 3x = (\cos \alpha)^{\cos \alpha},$$

naar $\alpha = 57^\circ\, 3'\, 15''$.

2. 178530 Kr. udlaanes til 4 pro Cent i aarlig Rente. Gjælden med Rente og Rentes Rente afbetales ved aarlige Udbetalinger, den første 3 Aar, efter at Gjælden er stiftet. Udbetalingerne ere paa 20000 Kr. undtagen den sidste, som er mindre. Hvor mange Udbetalinger ere nødvendige? og hvor stor maa den sidste Udbetaling være?

$$(\log 1{,}04 = 0{,}0170333).$$

Opl. 1. Man maa have

$$\log \cos x = \cos \alpha \,.\, \log \cos \alpha,$$

og, idet begge Sider i denne Ligning ere negative,

$$\log(-\log \cos 3x) = \log \cos \alpha + \log(-\log \cos \alpha).$$

$$\log \cos \alpha = 9{,}73547 - 10 = -0{,}26453$$

$$\log(-\log \cos \alpha) = 9{,}42248 - 10$$

$$\log(-\log \cos 3x) = 9{,}15795 - 10$$

$$\log \cos 3x = -0{,}14386 = 9{,}85614 - 10,$$

$$3x = \pm 44^\circ\, 6'\, 30'' + \text{p.}\, 360^\circ,\quad x = \pm 14^\circ\, 42'\, 10'' + \text{p.}\, 120^\circ.$$

2. Sættes $178530 = A$, $20000 = \varrho$ og $0{,}04 = r$, bestemmes Antallet af Udbetalinger n ved

$$n > \frac{\log \varrho - \log(\varrho - A(1+r)^2 r)}{\log(1+r)} > n - 1.$$

$$A(1+r)^2 r = 7724,$$

$$\varrho - A(1+r)^2 \,.\, r = 12276,$$

$$n > \frac{0{,}21197}{0{,}01703} > n - 1$$

giver

$$n = 13.$$

Betaltes der ogsaa sidste Gang 20000 Kr., vilde derved være betalt følgende Beløb for meget

$$\varrho \frac{(1+r)^{18}-1}{r} - A(1+r)^{15} = 332538 - 321521,$$

eller 11017 for meget. Sidste Gang skal der altsaa kun betales 20000 — 11017 = 8983 Kr., hvor det sidste Ciffer dog ikke er paalideligt.

Ved Beregningen af n ere Interpolationerne selvfølgelig overflødige, naar man som her ikke benytter Brøken til Beregning af sidste Udbetaling.

Geometri.

1. En Cylinder med Højden h er indskreven i en Kugle med Radius r. Find Diameteren i den Kugle, der har samme Volumen (Rumfang) som det ringformede Legeme, der begrænses af Cylinderens krumme Overflade og af et Bælte (en Zone) af Kuglefladen.

Hvor stort maa Forholdet $\frac{h}{r}$ være, naar n saadanne Kugler skulle kunne ligge saaledes inden i Cylinderen, at enhver af dem berører to andre samt Cylinderens krumme Overflade?

Expl. $n = 6$.

2. Find Ligningen for det geometriske Sted for et saadant Punkt, at Tangenter derfra til 2 givne lige store Cirkler danne en given Sum. (Tangenterne ere regnede mellem Punktet og Røringspunkterne. Koordinatsystemet vælges saaledes, at Ligningen faar en simpel Form).

Hvilke Kurver kan den fundne Ligning fremstille?

Opl. 1. Af bekjendte Formler udledes let, at h bliver den søgte Kugles Diameter. De i Cylinderen indesluttede Kugler berøre altsaa af sig selv dennes Grundflader. Sættes nu Cylinderens Grundflades Radius $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}h^2} = \varrho$, maa Storcirklerne i de i Cylinderen indesluttede Kugler med Diameteren h inde-

sluttes i en Cirkel med Radius ϱ. Skal der være n saadanne, som berøre den ydre Cirkel og hinanden 2 og 2, maa man have

$$\frac{h}{2} = \left(\varrho - \frac{h}{2}\right) \sin \frac{180^0}{n},$$

altsaa ved Elimination af ϱ

$$\frac{h^2}{r^2} = 4 \frac{\sin^2 \frac{180^0}{n}}{1 + 2 \sin \frac{180^0}{n} + 2 \sin^2 \frac{180^0}{n}}.$$

$n = 6$ giver $\frac{h}{r} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

2. Tages de givne Cirklers Centerlinie til Abscisseaxe, dens Midtpunkt til Begyndelsespunkt, og kaldes de givne Cirklers Radiè a, Centerlinien $2c$; Tangenterne fra et Kurvepunkt t og t' og deres Sum $2k$, haves

$$t'^2 = (x + c)^2 + y^2 - a^2,$$
$$t^2 = (x - c)^2 + y^2 - a^2,$$

altsaa $$t'^2 - t^2 = 4xc.$$

Da nu $$t' + t = 2k$$

faas $$t' - t = \frac{2xc}{k},$$

altsaa $$t = k - \frac{xc}{k},$$

og ved Indsættelse

$$\frac{k^2 - c^2}{k^2} x^2 + y^2 = a^2 + k^2 - c^2.$$

Denne Ligning fremstiller,

1) naar $k^2 > c^2$, en Ellipse med Axerne $2k\sqrt{\frac{a^2 + k^2 - c^2}{k^2 - c^2}}$ og $2\sqrt{a^2 + k^2 - c^2}$ paa x- og y-Axen;

2) naar $k^2 = c^2$, et Par rette Linier parallele med Abscisseaxen;

3) naar $c^2 - a^2 < k^2 < c^2$, en Hyperbel med 2den Axe $2k\sqrt{\frac{a^2 + k^2 - c^2}{c^2 - k^2}}$ paa Abscisseaxen og 1ste Axe $2\sqrt{a^2 + k^2 - c^2}$ paa Ordinataxen;

4) naar $k^2 = c^2 - a^2$, et Par rette Linier gjennem Begyndelsespunktet;

5) naar $k^2 < c^2 - a^2$, en Hyperbel med første Axe $2k\sqrt{\frac{c^2-a^2-k^2}{c^2-k^2}}$ paa Abscisseaxen og anden Axe $2\sqrt{c^2-a^2-k^2}$ paa Ordinataxen.

(En Undersøgelse af, med hvilke Fortegn t og t_1 maa regnes for de forskjellige Dele af det geometriske Sted, fordres ikke og vilde være for vidtløftig til at forlange ved Examen, men vil afgive en god Øvelse i Diskussion af analytisk Geometri).

Projektionstegning.

Tegn først Billederne (Projektionerne) af tre kongruente og rette (retstaaende) Kegler, hvis Grundflader ligge i den vandrette Billedplan (horizontale Projektionsplan) og berøre hinanden to og to, og hvis Toppunkter ligge over den nævnte Billedplan. Beliggenheden skal være en saadan, at ingen af de fælles Tangentplaner til Keglerne staar vinkelret (lodret) paa den lodrette Billedplan (vertikale Projektionsplan). Konstruer dernæst Billederne af en fjerde Kegle, som er kongruent med de tre første, men med Toppunktet nedad, og hvis vandrette Spor berører hver af de førstes Grundflader. Keglerne betragtes som uigjennemsigtige.

Tillige konstrueres det lodrette Billede af den Kurve, hvori den fjerde Keglefades Forlængelse ud over sin Grundflade skjærer en ydre fælles Tangentplan til to af de tre første Kegler, samt denne Skjæringskurves sande Figur. Keglefladens Forlængelse og Tangentplanen betragtes som gjennemsigtige, og Skjæringskurvens Projektion og sande Figur trækkes fuldt op.

Almindelig Forberedelsesexamen. Marts 1887.

Arithmetik.

1. Udtrykket

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6}$$

skal sammentrækkes til én Brøk; denne skal forkortes, og det skal afgjøres, hvor stor x skal være, for at den forkortede Brøk skal være Nul, og hvor stor x skal være, for at den forkortede Brøk skal være uendelig stor.

2. Man skal ved Logarithmer beregne Værdien af

$$x = 0{,}7^{\log 0{,}7}.$$

3. Find x af Ligningen

$$x^{1+\log x} = 100.$$

Opl. 1. Den forkortede Brøk er

$$y = \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}.$$

$$x = 2 \text{ giver } y = 0,$$

$$x = 1 \text{ giver } y = \infty,$$

$$x = 3 \text{ giver } y = \infty.$$

2. Man faar: $\log x = (0{,}15490)^2 = 0{,}02399.$

$$x = 1{,}0568.$$

3. Ved at tage Logarithmen faas:

$$(\log x)^2 + \log x - 2 = 0,$$

$$\log x = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}, \quad x = \begin{cases} 10 \\ \frac{1}{100} \end{cases}.$$

Geometri.

1. At konstruere en regelmæssig Ottekant, naar Længden af dens mindste Radius er given.

2. I en retvinklet Trekant er Hypotenusen givet lig $2r$, den ene spidse Vinkel er 18°. Fra den rette Vinkels Spids til Hypotenusens Midtpunkt er tegnet en ret Linie.

Hvor lang er denne Linie, og hvilke Vinkler danner den med Hypotenusen? Hvor store ere Katheterne i den retvinklede Trekant? Hvor stort er Arealet af den retvinklede Trekant?

3. I en Cirkel er indskrevet en regelmæssig Sexkant, hvis Areal er 1 □'. Hvor stort er Cirklens Areal?

Opl. 1. En regelmæssig Ottekant indskrives i en Cirkel med den givne Radius. Derefter tegnes Tangenter til Cirklen gjennem Ottekantens Vinkelspidser.

2. Medianens Længde er r. Dens Vinkler med Hypotenusen ere 36° og 144°. Den ene Kathete er Side i en regelmæssig Tikant med største Radius r og altsaa lig

$$\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Den anden findes ved den pythagoræiske Sætning at være

$$\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Arealet er
$$\frac{r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

3. Kaldes Cirklens Radius r, giver Sexkantens Areal

$$\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}=1.$$

Cirklens Areal bliver da:

$$C=\pi r^2=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\log C=0{,}08250,$$

$$C=1{,}2092\ \square'.$$

Praktisk Regning.

1. En Mand begynder en Forretning med 7000 Kr.; paa denne Sum tabes i det første Aar 4 Procent; paa Resten af Kapitalen tabes i det andet Aar 5 Procent; paa den derefter tilbageblevne Kapital tabes i det tredie Aar 6 Procent; paa det Beløb, som derefter er tilovers, vindes i det fjerde Aar 7 Procent; paa det Beløb, som Kapitalen derved er voxet til, vindes i det femte Aar 8 Procent. Hvad ejer Manden efter Udløbet af de fem Aar?

Dersom Forretningen i de fire første Aar gaar, som ovenfor er angivet, saa spørges der om, hvor mange Procent der i det femte Aar skal vindes paa det Beløb, som Kapitalen udgjør efter Udløbet af det fjerde Aar, for at Manden ved Udløbet af det femte Aar atter kan eje 7000 Kr.?

2. En Mand kjøber 720 Tønder Korn for 12 Kr. 48 Øre pr. Tønde. Kornet forsendes med Skib til det Sted, hvor det skal sælges. Forsendelsesomkostningerne udgjøre 5 Procent af Indkjøbsprisen. En Del af Ladningen beskadiges paa Vejen, saa at en Sjettedel af Kornet maa sælges saaledes, at der tabes $6\frac{1}{4}$ Procent

af, hvad denne Sjettedel ialt har kostet (o: af dens Indkjøbspris og Forsendelsesomkostninger tilsammen). En Trediedel af Kornet maa sælges for netop det samme Beløb, som denne Trediedel ialt har kostet. Resten sælges saaledes, at der vindes $8\frac{1}{3}$ Procent af det Beløb, som denne Rest ialt har kostet. Hvor mange Procent af det Beløb, som alt Kornet ialt har kostet, har Manden tjent ved denne Forretning?

Opl. 1. Den i Opgavens første Del søgte Kapital er:

$$x = 7000 \,.\, 0{,}96 \,.\, 0{,}95 \,.\, 0{,}94 \,.\, 1{,}07 \,.\, 1{,}08,$$
$$log\, x = 3{,}84102,$$
$$x = 6934{,}6 \text{ Kr.}$$

Kaldes den i Opgavens anden Del søgte Rentefod for y, saa er:

$$7000 \,.\, 0{,}96 \,.\, 0{,}95 \,.\, 0{,}94 \,.\, 1{,}07\,(1 + y) = 7000,$$
$$1 + y = \frac{1}{0{,}96 \,.\, 0{,}95 \,.\, 0{,}94 \,.\, 1{,}07},$$
$$log\,(1 + y) = 0{,}03750,$$
$$1 + y = 1{,}09018, \text{ o: } 9{,}018 \text{ Procent.}$$

2. Kaldes den ubekjendte Rentefod x, har man:

$$720 \,.\, 12{,}48 \,.\, 1{,}05\left(\frac{1}{6}\left(1 - \frac{6\frac{1}{4}}{100}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{8\frac{1}{3}}{100}\right)\right)$$
$$= 720 \,.\, 12{,}48 \,.\, 1{,}05 \,.\, (1 + x),$$
$$\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{12}\right) = 1 + x,$$
$$x = \frac{1}{32}, \text{ o: } 3\tfrac{1}{8} \text{ Procent.}$$

4de Klasses Hovedexamen og alm. Forberedelsesexamen. Juni 1887.

Arithmetik.

1. 515 Kr. ere satte paa Rente og Rentes Rente til den aarlige Rentefod 4 p. Ct. i 3 Aar; den nye Sum derpaa til den aarlige Rentefod $3\frac{3}{4}$ p. Ct. i 2 Aar, og den derved fremkomne Sum til den aarlige Rentefod $3\frac{1}{2}$ p. Ct. i $1\frac{1}{2}$ Aar. Renten lægges halvaarlig til Kapitalen. Hvor stor er den oprindelige Kapital bleven? Hvor stor vilde den være bleven, hvis den hele Tiden havde staaet til den aarlige Rentefod $3\frac{3}{4}$ p. Ct., og Renten halvaarlig var lagt

til? Til hvilken aarlig Rentefod skulde den have været sat ud hele Tiden, hvis den, ogsaa med halvaarlig Rente, skulde have naaet den samme Størrelse, som den voxede til paa den første Maade?

2. $8x^{-6} + 999x^{-3} = 125$. Find x.

3. 3 Differensrækker, hver bestaaende af n Led, begynde alle med 1. Differenserne ere henholdsvis 1, 2 og 3. Find Rækkernes sidste Led (t_1, t_2, t_3) og Summen af hver Række (s_1, s_2, s_3), og vis, at t_2 er Middeltallet mellem t_1 og t_3, og ligeledes s_2 mellem s_1 og s_3. Hvor stor skulde Differensen være i den anden Række, for at s_2 skulde være Mellemproportional mellem s_1 og s_3? Til Exempel for det sidste Spørgsmaals Vedkommende: $n = 17$.

Opl. 1. $515 \,.\, 1{,}02^6 \,.\, 1{,}01875^4 \,.\, 1{,}0175^3 = x,$

$$\log x = 2{,}71181 + 0{,}05160 + 0{,}03226 + 0{,}02260 = 2{,}81827,$$

$$x = 658{,}07 \text{ Kr.},$$

$$515 \,.\, 1{,}04875^{13} = x_1,$$

$$\log x_1 = 2{,}71181 + 0{,}10485 = 2{,}81666,$$

$$x_1 = 655{,}63 \text{ Kr.}$$

$$1 + r = \sqrt[3]{\frac{658{,}07}{515}},\ \log(1 + r) = \frac{1}{13}(2{,}81827 - 2{,}71181) =$$

$$0{,}00819 = \log 1{,}01905.$$

$r = 0{,}01905$, svarende til 3,81 p. Ct. p. A.,

Anm. af Redaktionen. Skjønt en Forretningsmand ikke noget Øjeblik vilde være i Tvivl om, at Meningen af de brugte Udtryk er den, at 4 p. Ct. p. A. skal forstaas som 2 p. Ct. halvaarlig o. s. v., saa kan det samme dog ikke med Sikkerhed ventes at gjælde om Eleverne, da Lærebøgerne netop meget skarpt fremhæve Forskjellen mellem 4 p. Ct. helaarlig og 2 p. Ct. halvaarlig, uden paa den anden Side at meddele noget om, hvorledes Sprogbrugen er i det praktiske Liv. Det havde derfor været at foretrække, at Opgaven havde været affattet i Udtryk, som vare i Overensstemmelse med den, Examinanderne plejede at benytte.

J. P. G.

Opl. 2. $(x^{-3})^2 + \frac{999}{8}x^{-3} - \frac{125}{8} = 0$ giver

$$x^{-3} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 2. \\ -125, & x = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Opl. 3. $t_1 = n$, $t_2 = 2n - 1$, $t_3 = 3n - 2$,

$$2n - 1 = \frac{t_1 + t_2}{2}; \; s_1 = (n+1) \cdot \frac{n}{2}; \; s_2 = n^2,$$

$$s_3 = (3n - 1) \cdot \frac{n}{2}, \; n^2 = \frac{s_1 + s_3}{2},$$

$$d = \frac{-2 \pm \sqrt{(n+1)(3n-1)}}{n-1}.$$ I Exemplet er $d = \frac{7}{4}$ eller $d = -2$.

Geometri.

1. I en Trekant ABC er $AB = BC$. Fra B er henad BA og BC afsat Stykkerne BD og BE henholdsvis $= \frac{1}{4} BA$ og $= \frac{1}{3} BC$. DE skjærer AC's Forlængelse i F. Hvor lang er CF udtrykt ved AC?

2. Konstruer et Rektangel, der i Areal er ligt et givet Kvadrat med Siden a. Rektanglets Sider have en Forskjel = en given Linie b.

3. En Cirkel med Radius $= r$ er given. Gjennem dens Centrum og Endepunkterne af en Bue paa 60^0 er beskreven en anden Cirkel. Man skal finde Arealerne af de derved fremkomne krumlinede Figurer, udtrykte ved r.

Opl. 1. Drages $GE \neq AC$, saa er $GE = \frac{1}{3} AC$; $DG = \frac{1}{12} BA$.

$$\frac{GE}{AF} = \frac{DG}{DA} = \frac{1}{9}; \; AF = AC + CF = 9\,GE = 3\,AC,$$

$$CF = 2\,AC.$$

Man kunde ogsaa drage en Linie gjennem $D \neq AC$ eller gjennem $C \neq AB$.

Opl. 2. Tegnes en Cirkel med Diameter b og bestemmes udenfor denne et Punkt A, saaledes at en Tangent til Cirklen fra dette er lig a, og drages endelig fra dette Punkt en Linie gjennem Centrum, saa faas umiddelbart Rektanglets Sider bestemte som Afstandene fra A til Liniens Skjæringspunkter med Cirklen.

Opl. 3. De søgte Arealer ere henholdsvis

$$\frac{r^2}{18}(3\sqrt{3}-\pi);\quad \frac{r^2}{18}(7\pi-3\sqrt{3});\quad \frac{r^2}{18}(11\pi+3\sqrt{3}).$$

Praktisk Regning. (Alm. Forberedelsesexamen).

1. En Mand sender en Blanding af 2 Sorter Korn til England. Den ene Sort er kjøbt for 12 Kr. pr. Td., den anden for 12 Kr. 50 Øre pr. Td. Undervejs fordærves $\frac{1}{5}$ af Kornet og bliver usælgeligt; Resten sælges for $1\frac{4}{5}$ Lstr. pr. Quarter, for ialt 960 Lstr., hvilket er 420 Kr. mere end Indkjøbsprisen for alt Kornet. Hvor mange Tdr. blev der kjøbt af hver Sort? (10 Quarter = 21 Tdr. 1 Lstr. = 18 Kr. 25 Øre).

2. En Mark har Form af et Rektangel med Siderne 1390,6 Alen og 206,79 Alen. Den besaas med Rug, hvortil medgaar 7,4326 Skp. pr. Td. Ld., og der høstes 13,107 Fold, hvoraf $\frac{13}{27}$ sælges for 14 Kr. 75 Øre pr. Td. Hvor meget indkommer derfor? (1 Td. Ld. = 14000 □ Alen).

Opl. 1. $\frac{960}{1\frac{4}{5}}$ giver $533\frac{1}{3}$ Qu., som er = 1120 Td. A kjøbte altsaa 1400 Td.

960 Lstr. = 17520 Kr., Indkjøbsprisen var 17520 Kr. — 420 Kr. = 17100 Kr.

$$12x + 12\tfrac{1}{2}(1400 - x) = 17100;\quad x = 800 \text{ Td.},\ 1400 - x = 600 \text{ Td.}$$

Opl. 2. $\frac{1390{,}6 \,.\, 206{,}79 \,.\, 7{,}4326 \,.\, 13{,}107 \,.\, 13 \,.\, 14{,}75}{14000 \,.\, 2 \,.\, 8 \,.\, 27}$ giver efter Forkortning og Udregning ved Logarithmer 1776 Kr. 32 Øre.

Adgangsexamen ved Polyteknisk Læreanstalt. Juni 1887.

I. 1. Konstruer en Trekant, som er ligedannet med en given Trekant, og som har sin ene Vinkelspids i et givet Punkt, medens de to andre falde i en given Cirkelperiferi.

2. Konstruer en Cirkel, som gaar igjennem to givne Punkter, medens Tangenterne fra et tredie givet Punkt danne en given Vinkel.

II. 1. I en Trekant er givet den ene Side, Højden paa denne og Forholdet mellem de to andre Sider. Hvorledes udtrykkes disse?

2. En Cirkel gaar gjennem to Punkter A og B, medens Tangenterne fra et tredie Punkt C danne en given Vinkel $2v$. Beregn Cirklens Radius, idet

$AC = 125$; $AB = 112$; $\angle CAB = 90^0$ og $\cos^2 v = \sin v$.

III. 1. Hvor stor er største Radius i det regulære Ikocaeder, naar Kanten er a?

2. Mellem to koncentriske Kugler med Radierne R og r ligge n Kugler saaledes, at enhver af dem rører de to koncentriske Kugler og alle de Kugler, der omgive den. (Om enhver Kugle ligger saaledes en Kreds af Kugler, der røre den, og af hvilke enhver rører de to nærmeste af Kredsen). For hvilke Værdier af Forholdet $R:r$ og af n er dette muligt?

IV. I en Parabel indskrives en Trekant ABC saaledes, at AB og AC ere Kurvens Normaler i Punkterne B og C. Bestem de geometriske Steder

1) for Skjæringspunktet af Medianerne i Trekant ABC og

2) for det Punkt, hvis Abscisse og Ordinat ere Mellemproportionaler mellem henholdsvis Abscisser og Ordinater til Punkterne B og C. (Uden Hensyn til Fortegnene).

Koordinatsystemets Stilling antages at være den sædvanlige.

MINDRE MEDDELELSER.

I. Naar p og q ere indbyrdes primiske, vil Divisionen

$$\frac{(x^{pq}-1)(x-1)}{(x^p-1)(x^q-1)}$$

gaa op, og det Udtryk, $f(x)$, som fremkommer, vil have alle sine Koefficienter lig 0, $+1$ eller -1.

1. At Divisionen gaar op, følger af, at $x^p - 1$ gaar op i

$$(x-1)(1 + x^q + x^{2q} + x^{3q} + \ldots x^{(p-1)q}) = \varphi(x).$$

Da q er primisk med p, ville Tallene

$$q,\ 2q,\ 3q \ldots (p-1)q$$

ved Division med p give lutter forskjellige Rester, hvoraf følger, at

$$\varphi(x) \equiv (x-1)(1+x+x^2+\ldots x^{p-1}) \ (mod\, x^p - 1),$$

saa at altsaa $x^p - 1$ gaar op i $\varphi(x)$.

For det Tilfælde, at p og q ere Primtal, er Sætningen bevist i en Afhandling Side 74 i forrige Aargang, og det deri givne Bevis kan ogsaa anvendes, naar p og q ere vilkaarlige primiske Tal.

2. Man har identisk

$$f(x) \,.\, (x^p - 1) = \varphi(x);$$

kaldes Koefficienten til x^n i $f(x)$ α_n og i $\varphi(x)$ β_n, faas ved Sammenligning

$$\alpha_{n-p} - \alpha_n = \beta_n,$$

hvoraf $\alpha_n = -\beta_n + \alpha_{n-p} = -\beta_n - \beta_{n-p} + \alpha_{n-2p} = \ldots$

$$= -\beta_n - \beta_{n-p} - \beta_{n-2p} - \ldots$$

Da $\varphi(x)$ er af Graden $(p-1)q+1$, findes der højst q Led (β) i α_n, og Indices i disse Led give alle forskjellige Rester ved Division med q; nu giver en direkte Betragtning af $\varphi(x)$, at $\beta_n = -1$, naar q gaar op i n, $\beta_n = +1$, naar n giver Resten 1 ved Division med q, og $\beta_n = 0$ i alle andre Tilfælde, hvoraf følger, at højst et Led i α_n er $+1$, højst et Led er -1 og de øvrige Led altid ere Nul, saa at man maa have $\alpha_n = 0$, $+1$ eller -1.

(A. S. **Bang**).

II. Følgende elegante K o n s t r u k t i o n af M e l l e m p r o p o r t i o n a l l i n i e n til to givne a og b turde fortjene Opmærksomhed, da den vistnok er den i praktisk Henseende simplést mulige. Paa en ret Linie afsætter man $BC = b$ og i modsatte Retninger $CA = BD = a$. Om A og D som Centrer slaas med Radius a to Cirkelbuer, som skjære hinanden i et Punkt O. Da er $OB = OC$ den søgte Mellemproportional. Det er ligegyldigt, om a eller b er størst, men Konstruktionen bliver nøjagtigst, naar a tages $>$ b. Beviset faas let ved at fælde den vinkelrette fra O og slaa en af Cirklerne helt rundt, idet da umiddelbart ses, at OB bliver Mellemproportional til $2a$ og $\frac{1}{2}b$. Denne Konstruktion skal for c. 30 Aar siden være angivet af Schweizeren Gouzy.

(J. P. G.).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von | Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

Femte Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1887.

TREDIE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Linnésgade 16, A, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

OM ALGEBRAISKE KURVERS BESTEMMELSE VED PUNKTER.

(AF H. G. ZEUTHEN).

Læren om Bestemmelsen af en algebraisk Kurve ved Punkter har et meget simpelt Grundlag, nemlig Tællingen af Konstanter i en algebraisk Ligning og Dannelsen af Ligninger af første Grad til Bestemmelse af Konstanterne ved Indsættelse af de givne Punkters Koordinater. Den kan derfor fremstilles og i sine Hovedtræk forstaas strax efter den analytiske Geometris første Begyndelsesgrunde. Den, som ikke vil blive paa Overfladen, men vil gjøre sine Beviser uangribelige og udtale sine Sætninger saaledes, at ingen Grænser for deres Anvendelse forblive tvivlsomme, vil derimod paa dette Omraade finde ret betydelige Vanskeligheder.

Hvori disse bestaa, kan antydes derved, at Sætningerne, som man har at opstille, handle om, at visse Grupper af opgivne Punkter kun give et mindre Antal indbyrdes uafhængige Ligninger til Konstanternes Bestemmelse. Saadanne Sætningers Værd formindskes væsentlig, naar man ikke har paalidelige Midler til at dømme om den indbyrdes Uafhængighed af de Bestemmelser, som man beholder tilbage, ja de kunne blive fuldstændig værdiløse, naar man ikke engang faar Vished for, at det kun er i Undtagelsestilfælde, at denne Uafhængighed ikke kan opnaas.

Der turde vel findes Exempler paa, at disse Vanskeligheder ere helt oversete, og indenfor Lærebogsliteraturen findes neppe noget Exempel paa, at de ere fuldstændig overvundne. I Stedet for her at skildre deraf flydende Svagheder, skal jeg nøjes med at henvise til min Anmeldelse her i Tidsskriftet (1877) af Jul. Petersen: Analytisk Geometri II, hvor jeg har vist, at end ikke denne Forfatter, som ellers ingenlunde plejer at opnaa sin store Korthed og Simpelhed paa Nøjagtighedens Bekostning, helt har undgaaet dem.

I Specialafhandlinger ere Vanskelighederne dog overvundne, navnlig af Nöther, hvis Behandling dog er bleven for omfattende

for Lærebøgerne derved, at han (saavel som Halphen) har medtaget Hensyn til saadanne Tilfælde, hvor de bestemmende Punkter ere sammenfaldende Skjæringspunkter mellem givne Kurver. Ved at lade en Behandling af Bestemmelsen ved lutter adskilte Punkter gaa forud, har imidlertid hans Discipel Dr. Bacharach i sin Doktordisputats opnaaet en Fremstilling, som i Hovedsagen nok kunde finde Plads i større Lærebøger [1]).

Den paagjældende Lære er imidlertid saa fundamental, ej blot for de algebraiske Kurvers og Funktioners Theori, men ogsaa for Læren om Integraler af algebraiske Differentialer og disses omvendte Funktioner, at det ikke er uden Betydning at opnaa det samme ad forskjellige Veje. I det her meddelte lille Arbejde har jeg efter bedste Evne stræbt at opnaa den tilsigtede Uangribelighed ved de simplest mulige Midler. Medens Nöther og Bacharach gjøre Brug af den algebraiske Form for Bestemmelsen af to Kurvers Skjæringspunkter ved Elimination, har jeg søgt at holde mig til det sædvanlige simple Grundlag for Kurvers Bestemmelse ved Punkter, idet jeg blot gjør de efterhaanden vundne Sætninger fuldt anvendelige ved ej blot at spørge om nødvendige men ogsaa om tilstrækkelige Betingelser.

1. En Kurve af n'te Orden er bestemt ved $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkter, hvorigjennem den skal gaa, naar blot disse Punkter ere indbyrdes uafhængige, det vil sige, naar ikke enhver Kurve af n'te Orden gjennem nogle af Punkterne af sig selv gaar igjennem andre af disse.

Rigtigheden heraf følger af, at Kurvens Ligning indeholder $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Koefficienter, hvis $\frac{n(n+3)}{2}$ Forhold det er tilstrækkeligt at kjende, samt at hvert givet Punkt giver en Ligning af første Grad mellem disse.

For at bruge denne Sætning med Sikkerhed gjælder det om

---

[1]) Dette gjælder maaske ikke om Dr. Valentiners Behandling her i Tidsskriftet af enkelte herhen hørende Spørgsmaal, hvor uangribelig denne Behandling end turde være.

at finde Kjendetegn paa, hvor mange indbyrdes uafhængige Punkter en given Punktgruppe indeholder.

2. Vi begynde med at spørge: Hvor mange indbyrdes uafhængige Bestemmelser af en Kurve af n'te Orden φ_n giver det, at den skal gaa igjennem de nm Skjæringspunkter mellem en given usammensat Kurve ψ_m af m'te Orden og en given Kurve af n'te Orden. Naar vi her og i det følgende tale om Skjæringspunkter mellem to Kurver, forudsættes det, at Kurverne ikke helt eller delvis falde sammen.

A. For $n < m$ kan man indse, at de nm Punkter fuldstændig ville bestemme φ_n og altsaa være at tælle som $\frac{n(n+3)}{2}$ indbyrdes uafhængige Punkter. I modsat Fald vilde man nemlig kunne bringe φ_n til at gaa igjennem endnu et Punkt af ψ_m, hvorved de vilde faa $nm + 1$ Punkter fælles, hvilket er umuligt, da den usammensatte Kurve ψ_m ikke kan være en Del af φ_n, fordi $n < m$. To Kurver af n'te Orden, der skjære ψ_m i de samme Punkter, falde altsaa sammen.

B. For $n \overline{\overline{>}} m$ ville vi antage, at de nm Skjæringspunkter give $nm - x$ indbyrdes uafhængige Bestemmelser, eller at en Kurve af n'te Orden φ_n, der gaar gjennem $nm - x$, passende valgte, blandt Skjæringspunkterne, ogsaa gaar gjennem de x sidste. Vi skulle bestemme x ved at søge, hvor mange nye Punkter der endnu behøves til at bestemme φ_n. Lægger man et af de nye Punkter paa ψ_m, faar denne sidste $mn + 1$ Punkter fælles med φ_n, og maa altsaa, da den er usammensat, udgjøre en Del af φ_n. Den øvrige Del af denne bliver af Ordenen $n - m$, og den fuldstændige Bestemmelse af φ_n kræver altsaa endnu $\frac{(n-m)(n-m+3)}{2}$ Punkter. Idet man saaledes faar en Kurve φ_n bestemt alene ved Punkter, maa Antallet af de indbyrdes uafhængige være $\frac{n(n+3)}{2}$. Altsaa er

$$\frac{n(n+3)}{2} = nm - x + 1 + \frac{(n-m)(n-m+3)}{2},$$

hvoraf
$$x = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Altsaa: De nm Punkter, hvori en given Kurve af n'te Orden skjærer en given, usammensat Kurve af m'te Orden, give, naar $n < m$, $\frac{n(n+3)}{2}$, og naar $n \overline{\geq} m$, $nm - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ indbyrdes uafhængige Bestemmelser af en derigjennem gaaende Kurve φ_n af n'te Orden. Man kan altsaa af Skjæringspunkterne udtage disse Antal indbyrdes uafhængige Punkter, og enhver Kurve af n'te Orden gjennem de udtagne Punkter, hvilke ikke altid kunne være vilkaarlige Punkter af Gruppen, vil da af sig selv gaa gjennem de øvrige $nm - \frac{n(n+3)}{2}$ eller $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Punkter i denne.

Da Ligningen
$$nm - \frac{n(n+3)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$
vilde give $n = m - 1$ eller $n = m - 2$, kan i disse 2 Tilfælde hvilken som helst af de to Regler anvendes.

Tillæg. En usammensat Kurve ψ_m af m'te Orden kan ikke have mere end $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Dobbeltpunkter. Er der nemlig d Dobbeltpunkter, kan man igjennem dem altid lægge en Kurve φ_n af tilstrækkelig høj Orden n ($\geqq m - 2$). Denne vil endnu skjære ψ_m i d nye Punkter, som falde i Dobbeltpunkterne, og som ikke give nogen ny Bestemmelse af φ_n; men af saadanne Punkter kan der som vist ikke existere mere end $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

3. Den i 2 beviste Sætning vil med en bestemt Undtagelse ogsaa gjælde, naar ψ_m er sammensat. For at finde denne Undtagelse maa man erindre, at den Omstændighed, at ψ_m var usammensat, benyttedes til at vise, at ψ_m maatte udgjøre en Del af φ_n, naar denne foruden gjennem de mn givne Skjæringspunkter skulde gaa igjennem endnu et Punkt af ψ_m. Lad os nu antage,

at $\psi_m (= \psi_{m_1} \psi_{m_2})$ er sammensat, og at ψ_{m_1} af Ordenen m_1 er en usammensat Del deraf. Hvis man nu fordrer, at φ_n foruden gjennem de mn Skjæringspunkter, der indbefatte de $m_1 n$ Skjæringspunkter med ψ_{m_1}, skal gaa gjennem endnu et Punkt af denne, maa den helt indeholde den. φ_n vil da foruden af ψ_{m_1} komme til at bestaa af en Kurve ω_{n-m_1} af Ordenen $n - m_1$, som gaar gjennem alle dem blandt de opgivne nm_2 Skjæringspunkter mellem φ_n og ψ_{m_2}, hvorigjennem ψ_{m_1} ikke allerede gaar. ω_{n-m_1} vil altsaa gaa igjennem mere end $(n - m_1) m_2$ Punkter af ψ_{m_2}, undtagen i det Tilfælde, hvor alle $m_1 m_2$ Skjæringspunkter mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2} høre med til de opgivne nm Skjæringspunkter mellem φ_n og ψ_m. Finder dette sidste ikke Sted, maa ω_{n-m_1} indeholde Kurven ψ_{m_2} og altsaa φ_n indeholde hele ψ_m, hvis ψ_{m_2} er usammensat. Er derimod ψ_{m_2} sammensat, maa Undersøgelsen fortsættes paa samme Maade. Man finder, at de i Nr. 2 fundne Resultater vedblive at være rigtige, naar ψ_m er sammensat, hvis blot ingen af de sammensættende Dele alene skjærer den øvrige Del af Kurven ψ_m i Punkter, som høre med til de givne mn Skjæringspunkter med φ_n.

4. Vi skulle nu se, at det her angivne Tilfælde virkelig danner en Undtagelse, idet vi bevise, at de $m_1 m_2$ Skjæringspunkter mellem 2 Kurver ψ_{m_1} og ψ_{m_2} samt de øvrige Skjæringspunkter mellem en derigjennem gaaende Kurve af n'te Orden og ψ_{m_1} og ψ_{m_2} ved Bestemmelse af en ny Kurve af n'te Orden φ_n gjennem alle de samme Punkter ville tælle som et givet Punkt mindre end Skjæringspunkterne med en anden Kurve af Ordenen $m_1 + m_2$. Naar vi sætte $m_1 + m_2 = m$, ville alle Skjæringspunkterne med ψ_{m_1} og ψ_{m_2} altsaa for $n > m - 3$ højst være at tælle som $nm - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1$ opgivne Punkter, og for $n < m$ højst som $\frac{n(n+3)}{2} - 1$. Vi kunne nøjes med her at bevise dette, idet den følgende Sætning, 5, derefter vil vise, at de her angivne Antal af indbyrdes uafhængige Skjæringspunkter

virkelig ville naas, naar ingen yderligere Sammensætning af ψ_{m_1} eller ψ_{m_2} giver fornyet Anledning til samme Formindskelse.

Sætningen faar ingen Betydning, naar $n < m_1$, da den givne Kurve af n'te Orden saa helt eller delvis vilde indeholde ψ_{m_2}, eller naar $n < m_2$. Foruden $n \geqq m_1$, $n \geqq m_2$ skal det for Øjeblikket (i Nr. 4—7) forudsættes, at ingen af Kurverne ψ_{m_1} og ψ_{m_2}'s Skjæringspunkter falde sammen indbyrdes.

Vi begynde med at betragte det Tilfælde, hvor n er saa stor, at det giver indbyrdes uafhængige Betingelser, at φ_n skal gaa gjennem de $m_1 m_2$ Skjæringspunkter mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2}. Dette finder f. Ex. ganske sikkert Sted, naar $n > m_1 m_2 - 1$, da man saa kan bringe en af n rette Linier sammensat Kurve til at gaa igjennem $m_1 m_2 - 1$ vilkaarlig valgte af Punkterne, uden at gaa igjennem det sidste.

For en saadan Værdi af n (som vi tillige forudsætte $> m - 3$) ville de $m_1 m_2$ Punkter kunne betragtes som henhørende til de indbyrdes uafhængige Skjæringspunkter baade med ψ_{m_1} og med ψ_{m_2}. Supplerer man disses Antal til de Værdier, som de kunne antage, uden at φ_n indeholder nogen af de to Kurver, bliver der i alt højst

$$nm_1 - \frac{(m_1 - 1)(m_1 - 2)}{2} + nm_2 - m_1 m_2 - \frac{(m_2 - 1)(m_2 - 2)}{2}$$

eller

$$nm - \frac{(m - 1)(m - 2)}{2} - 1$$

indbyrdes uafhængige Skjæringspunkter med den af ψ_{m_1} og ψ_{m_2} sammensatte Kurve.

Er derimod Ordenen n_1 af den søgte Kurve φ_{n_1} for lille til, at man paa Forhaand tør paastaa, at de Betingelser, at den skal gaa igjennem Skjæringspunkterne mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2}, ere indbyrdes uafhængige, kan man udfylde den dertil, helst ved Tilføjelse af rette Linier, som hver for sig skjære den af ψ_{m_1} og ψ_{m_2} sammensatte Kurve ψ_m i m adskilte Punkter. Vi ville, idet $n = n_1 + n_2$, ved φ_n betegne en Kurve af n'te Orden, der skal skjære ψ_m i de samme Punkter som en given Kurve af Ordenen

n_1 — deriblandt Skjæringspunkterne mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2} — og som n_2 rette Linier.

Idet nu Skjæringspunkterne med ψ_m give højst $nm - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1$ Bestemmelser af φ_n, kan man endnu bringe den til at gaa igjennem mindst $\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} + 1$ Punkter af Planen. Vælges $n - m + 1$ af disse paa en af de rette Linier, maa denne blive en Del af φ_n. Tilbage bliver en Kurve φ_{n-1}, som kan bringes til at gaa igjennem (mindst) $\frac{(n-m)(n-m+1)}{2} + 1$ Punkter foruden Skjæringspunkterne med ψ_m, hvilke sidste altsaa tælles som (højst) $(n-1)m - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1$ uafhængige Punkter. Om φ_{n-1}'s Bestemmelse ved disse gjælder altsaa det samme som om φ_n's. Paa denne Maade kan man fortsætte, til man kommer til den oprindelig søgte Kurve φ_{n_1}, eller hvis dennes Orden n_1 er mindre end m, indtil man kommer til en Kurve φ_m, som foruden gjennem Skjæringspunkterne med ψ_m kan bringes til at gaa igjennem (mindst) 2 vilkaarlig valgte Punkter. Lægger man det ene paa en af de tilføjede rette Linier, som endnu ere tilbage, vil for det første denne faa $m + 1$ Punkter fælles med φ_m og altsaa blive en Del af den. Den øvrige Del bliver af Ordenen $m - 1$, men skal dog endnu gaa gjennem hver af de øvrige rette Liniers m Skjæringspunkter med ψ_m. Den maa altsaa ogsaa indeholde alle disse. Tilbage bliver altsaa, naar $n_1 < m$, en Kurve φ_{n_1}, der foruden igjennem de opgivne Skjæringspunkter med ψ_m endnu kan bringes til at gaa igjennem (mindst) et vilkaarlig valgt Punkt og altsaa er underkastet (højst) $\frac{n_1(n_1+3)}{2} - 1$ Betingelser.

Tillæg til 3 og 4. Foruden den Anvendelse, som skal gjøres i det følgende, kan man bruge de beviste Sætninger til en Prøve, om en Kurve ψ_m af m'te Orden med mindre end $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ Dobbeltpunkter er usammensat eller ikke.

Kjendetegnet vil være, om disse Punkter og de andre, hvori en derigjennem gaaende Kurve af n'te Orden endnu skjærer ψ_m, give $nm - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ og for $n < m - 2$, $\frac{n(n+3)}{2}$ Bestemmelser af en saadan Kurve, eller et mindre Antal. Expl. En usammensat Kurve af 6te Orden kan ikke have Skjæringspunkterne mellem to Kurver af 3die Orden til Dobbeltpunkter.

5. Af 4 udledes, at for $n \geqq m_1$, $n \geqq m_2$ en Kurve φ_n af n'te Orden igjennem de $m_1 m_2$ Skjæringspunkter mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2} vil skjære en af disse, ψ_{m_2}, i de samme $(n - m_1) m_2$ Punkter, som en Kurve ϱ_{n-m_1} af Ordenen $n - m_1$.

Vi skulle foreløbig antage, at ψ_{m_1} og ψ_{m_2} ere usammensatte.

Man kan ifølge 4 bringe en Kurve af n'te Orden til foruden igjennem Skjæringspunkterne mellem φ_n og $\psi_{m_1} \cdot \psi_{m_2}$ at gaa gjennem endnu et Punkt af ψ_{m_1}. Den vil da helt indeholde denne Kurve. Dens øvrige Del maa, naar $n < m_1 + m_2$ være en fra ψ_{m_2} forskjellig Kurve ϱ_{n-m_1}, da dens Orden $n - m_1$ da er for lav til, at den kan indeholde ψ_{m_2}. Dette kan ogsaa undgaas, naar $n \geqq m_1 + m_2$, da af φ_n's indbyrdes uafhængige Skjæringspunkter med den sammensatte Kurve, som da ifølge 4 højst udgjøre

$$nm - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1,$$

hvor $m = m_1 + m_2$, eller

$$m_1 \cdot n - \frac{(m_1 - 1)(m_1 - 2)}{2}$$

$$+ m_2 (n - m_1) - \frac{(m_2 - 1)(m_2 - 2)}{2},$$

de i første Linie anførte udkræves til at bestemme alle Skjæringspunkter med ψ_{m_1}, hvorefter kun de i sidste Linie anførte skulle bestemme de øvrige Skjæringspunkter med ψ_{m_2}. Gjennem saa mange Punkter af ψ_{m_2} kan man imidlertid ifølge 2 lægge en Kurve af Ordenen $n - m_1$, som ikke indeholder ψ_{m_2}.

Kurven ϱ_{n-m_1} er fuldstændig uafhængig af Skjæringspunkterne med ψ_{m_1}; thi efterat man til disse har føjet endnu et Punkt,

bestemme de en Kurve af n'te Orden, sammensat af ψ_{m_1} og en endnu ganske ubestemt Kurve af Ordenen $n - m_1$. Derved faar man, at Antallet af indbyrdes uafhængige Skjæringspunkter med den sammensatte Kurve $\psi_{m_1} \cdot \psi_{m_2}$ virkelig naar de i 4 angivne Værdier.

Er ψ_{m_2} sammensat, f. Ex. af 2 Dele af Ordnerne m'_2 og m''_2, kunde det antages, at Kurven ϱ_{n-m_1} helt indeholdt den første af disse. Da ϱ_{n-m_1} skal gaa gjennem alle φ_n's $(n - m_1) m''_2$ Skjæringspunkter med den anden Del, vil dette dog kun være muligt, naar φ_n gaar gjennem alle $m'_2 m''_2$ Skjæringspunkter mellem de to Dele. I saa Fald formindskes Antallet af indbyrdes uafhængige Skjæringspunkter mellem φ_n og ψ_{m_2} med 1, og det vil derved helt kunne undgaas, at φ_n indeholder nogen af de to Dele.

Er ψ_{m_1} sammensat af to Dele af Ordnerne m'_1 og m''_1, faar dette kun Indflydelse paa Bevisførelsen, naar φ_n gaar gjennem alle disses $m'_1 m''_1$ Skjæringspunkter. Gjennem φ_n's Skjæringspunkter med ψ_{m_1} og ψ_{m_2} kan man da lægge en Kurve af n'te Orden sammensat af den første af ψ_{m_1}'s Dele og en Kurve af Ordenen $n - m'_1$. Ved at lade denne træde i φ_n's Sted finder man, at Skjæringspunkterne med ψ_{m_2} ligge paa en Kurve af Ordenen $n - m'_1 - m''_1$, det er: $n - m_1$.

6. Af 4 og 5 udledes, hvor mange Bestemmelser af en Kurve af Ordenen n det giver, at den skal gaa gjennem de $m_1 m_2$ Skjæringspunkter mellem 2 Kurver ψ_{m_1} og ψ_{m_2} af Ordnerne $m_1 m_2$, om hvilke det bestandig antages, at de ikke have sammenfaldende Skjæringspunkter. Det antages, at $n \geqq m_1$, $n \geqq m_2$.

Hvis $n > m_1 + m_2 - 3$, kan man af dens øvrige Skjæringspunkter med ψ_{m_2}, der skulle ligge paa en vilkaarlig Kurve af Ordenen $n - m_1$, vælge $m_2 (n - m_1) - \frac{(m_2 - 1)(m_2 - 2)}{2}$ vilkaarlig, og ikke flere. Betingelserne at gaa gjennem de $m_1 m_2$ Skjæringspunkter ere altsaa ifølge 2 og 3 indbyrdes uafhængige.

Hvis $n < m_1 + m_2$, ses paa samme Maade, at Antallet af indbyrdes uafhængige Skjæringspunkter udenfor Gruppen af de

$m_1 m_2$ Punkter bliver $\frac{(n-m_1)(n-m_1+3)}{2}$. Heraf følger, at den Fordring, at φ_n skal gaa igjennem de $m_1 m_2$ Skjæringspunkter giver netop

$$nm_2 - \frac{(n-m_1)(n-m_1+3)}{2} - \frac{(m_2-1)(m_2-2)}{2}$$

eller

$$m_1 m_2 - \frac{(m_1+m_2-n-1)(m_1+m_2-n-2)}{2}$$

indbyrdes uafhængige Betingelser (Cayley's Theorem).

7. Beviset for 5 kan benyttes til en analytisk Fremstilling af en Kurve af n'te Orden φ_n gjennem de $m_1 m_2$ Skjæringspunkter mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2}. Gjennem disse og φ_n's øvrige Skjæringspunkter med ψ_{m_2} gaar som vist en Kurve af n'te Orden, sammensat af ψ_{m_1} og en Kurve ϱ_{n-m_1} af Ordenen $n - m_1$. Det ved φ_n og den sammensatte Kurve $\psi_{m_1} \cdot \varrho_{n-m_1}$ bestemte Bundt vil indeholde en Kurve, som gaar igjennem et nyt Punkt af ψ_{m_2}, og hvoraf ψ_{m_2} altsaa udgjør en Del. Den øvrige Del π_{n-m_2} er af Ordenen $n - m_2$. Man finder altsaa

$$\varphi_n \equiv \psi_{m_1} \varrho_{n-m_1} + \psi_{m_2} \pi_{n-m_2}, \tag{1}$$

idet $\equiv$ betyder identisk lig, og Talkoefficienter ere trukne med ind i ϱ og π.

8. I Nr. 4—7 er det dog endnu forudsat, at Kurverne ψ_{m_1} og ψ_{m_2} ikke have sammenfaldende Skjæringspunkter. Have de saadanne, kan Ligningsformen (1) tjene til Forklaring af, hvad det vil sige, at en Kurve φ_n skal gaa igjennem sammenfaldende Skjæringspunkter mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2}. Der vil nemlig være visse Betingelser, som Koefficienterne i de første Led af de Rækker, som fremstille Kurven φ_n's gjennem et saadant Sammenfaldspunkt gaaende Grene, nødvendigvis maa tilfredsstille, for at Ligningen for Kurven φ_n skal kunne antage denne Form. Man finder f. Ex., at en enkelt Gren af ψ_{m_1}, som har r sammenfaldende Skjæringspunkter med ψ_{m_2}, maa have lige saa mange med φ_n, hvad der giver r lineære Ligninger mellem Koefficienterne i φ_n; at et Punkt, som er r-folds Punkt baade paa ψ_{m_1} og ψ_{m_2}, ogsaa maa være det

paa φ_n, og Samlingen af r Tangenter til hver af Kurverne i dette Punkt maa være i Involution, hvad der giver r^2 lineære Betingelser, svarende til de r^2 sammenfaldende Skjæringspunkter mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2} o. s. v. Angaaende yderligere Bestemmelser skal jeg henvise til Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie, S. 338 ff., men iøvrigt kun fremhæve, 1) at Fordringen, om at φ_n skal gaa gjennem r sammenfaldende Skjæringspunkter mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2} giver r lineære Ligninger i φ_n's Koefficienter, og 2) at r af Skjæringspunkterne mellem to Kurver, der begge tilfredsstille disse Betingelser, derved falde sammen. Bestemmelsen ved r sammenfaldende Punkter afviger saaledes ikke fra Bestemmelsen ved r adskilte Punkter i noget af det, som er benyttet i den foregaaende Udvikling. Denne, og altsaa ogsaa dens Resultater, vedblive altsaa at være gyldige.

9. Vi kunne af de foregaaende Sætninger udlede Kjendetegn paa, hvor mange indbyrdes uafhængige Bestemmelser af en Kurve af n'te Orden det giver, at den skal gaa gjennem en vis forelagt Gruppe af Punkter.

Vi kunne derved nøjes med at antage, at Gruppen ikke giver en fuldstændig Bestemmelse af Kurven, idet man, naar Kjendetegnene herpaa ikke ere tilstede hos et til Bestemmelsen tilstrækkeligt Antal Punkter, kan slutte, at de virkelig bestemme Kurven. Vi kunne altsaa antage, at der allerede er lagt Kurver af Ordenen n eller muligvis af lavere Ordener gjennem Gruppens Punkter, eller at disse udgjøre en Del af Skjæringspunkterne mellem to Kurver ψ_{m_1} og ψ_{m_2} af Ordnerne m_1 og m_2, hvor $n \geqq m_1$ og $n \geqq m_2$. Disse Kurver kunne godt være sammensatte; men det skal forudsættes, at de ikke delvis falde sammen. Den givne Punktgruppe ville vi kalde (P), de øvrige Skjæringspunkter mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2} danne en Gruppe (Q). Vi skulle for sig betragte de Tilfælde, hvor $n \gtreqless m_1 + m_2 - 3$.

I. Er $n > m_1 + m_2 - 3$, have vi allerede set i 6, at alle de $m_1 m_2$ Skjæringspunkter mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2} give indbyrdes uafhængige Bestemmelser af Kurven φ_n. Det samme

maa altsaa ogsaa være Tilfældet med enhver mindre Gruppe af disse Punkter.

II. Er $n = m_1 + m_2 - 3$, er det i 6 vist, at alle $m_1 m_2$ Skjæringspunkter give $m_1 m_2 - 1$ indbyrdes uafhængige Bestemmelser af φ_n; men der staar tilbage at bevise, at disse kunne erholdes ved hvilke som helst $m_1 m_2 - 1$ af Punkterne, og at saaledes e n h v e r G r u p p e (P), d e r b l o t i k k e i n d b e f a t t e r a l l e S k j æ r i n g s p u n k t e r, g i v e r i n d b y r d e s u a f h æ n g i g e B e s t e m m e l s e r.

For at bevise det, kunne vi gjennem de $m_1 m_2$ Skjæringspunkter lægge en Kurve af Ordenen $m_1 + m_2 - 2$, sammensat af en ret Linie λ gjennem et vilkaarlig valgt blandt Skjæringspunkterne, Q, og en Kurve φ_n gjennem de øvrige (P). Den sammensatte Kurves øvrige Skjæringspunkter med ψ_{m_2} ville ifølge 5 ligge paa en Kurve ϱ_{m_2-2} af Ordenen $m_2 - 2$. Da $m_2 - 1$ af dem ligge paa Linien gjennem Q, maa ϱ_{m_2-2} være sammensat af denne og en Kurve μ_{m_2-3}. Af denne sammensatte Kurves $m_2(m_2 - 2)$ Skjæringspunkter, ere de $m_2 - 1$ λ's Skjæringspunkter udenfor Q De øvrige $m_2(m_2 - 3) + 1$, maa være φ_n's Skjæringspunkter udenfor (P). Af disse falder altsaa det ene i Q, hvorigjennem da enhver Kurve af n'te Orden gjennem Punkterne (P) maa gaa. De øvrige ligge paa den vilkaarlige Kurve μ_{m_2-3} og give $\frac{m_2(m_2 - 3)}{2}$ Bestemmelser af φ_n's Skjæringspunkter med ψ_{m_2}. Baade det ene og det andet viser den indbyrdes Uafhængighed af de ved de $m_2 n - 1$ Punkter (P) givne Bestemmelser af φ_n.

III. Er $n < m_1 + m_2 - 3$, ville vi om en Gruppe paa $k + l$ Punkter (P) antage, at den giver k Bestemmelser af φ_n, saaledes at enhver Kurve φ_n, der gaar gjennem k passende valgte iblandt Punkterne, af sig selv gaar gjennem de l andre. Kurven φ_n kan da ifølge 6 bringes til endnu at gaa gjennem

$$m_1 m_2 - \frac{(m_1 + m_2 - n - 1)(m_1 + m_2 - n - 2)}{2} - 1 - k$$

af de øvrige Skjæringspunkter (Q) mellem ψ_{m_1} og ψ_{m_2}, uden derved at bringes til at gaa gjennem dem alle. En Kurve

$\mu_{m_1+m_2-n-3}$ gjennem de herved ikke benyttede Punkter (Q) vil endnu kunne bringes til at gaa igjennem $l-1$ Punkter af Planen; thi ifølge det nys under II beviste, vil den sammensatte Kurve $\varphi_n \cdot \mu_{m_1+m_2-n-3}$, som er af Ordenen m_1+m_2-3, naar den gaar igjennem Punkterne (P) og (Q) paa et hvilket som helst nær, af sig selv gaa gjennem dette sidste. $\mu_{m_1+m_2-n-3}$ skal altsaa kun bringes til at gaa gjennem

$$\frac{(m_1+m_2-n)(m_1+m_2-n-3)}{2}-l+1$$

Punkter (Q), idet Summen af dette Tal og det Antal Punkter (Q), hvorigjennem φ_n allerede er lagt, bliver $m_1 m_2 - k - l - 1$, altsaa 1 mindre end hele Antallet af Punkterne (Q).

Ved Brugen af dette Bevis maa bemærkes, at det vel kan hænde, at Kurven φ_n's Bestemmelse medfører, at den af sig selv gaar gjennem nogle af de Punkter (Q), hvorigjennem $\mu_{m_1+m_2-n-3}$ er sagt at skulle gaa. Dette svækker dog ikke Bevisets Gyldighed, naar man blot lader det sidste Punkt Q, som ikke benyttes ved Bestemmelsen af $\mu_{m_1+m_2-n-3}$, men hvorigjennem den skal gaa af sig selv, være et, hvorigjennem φ_n ikke gaar.

Da de af Punkterne (Q), hvorigjennem φ_n blev lagt, vare fuldkommen vilkaarlig valgte, ses det, at ogsaa en hvilken som helst Kombination af

$$\frac{(m_1+m_2-n)(m_1+m_2-n-3)}{2}-l+2$$

Punkter (Q) ligger paa en Kurve af Ordenen m_1+m_2-n-3, som tillige gaar gjennem $l-1$ vilkaarlige Punkter. Hvis for en af Kombinationerne dette giver en fuldstændig Bestemmelse af $\mu_{m_1+m_2-n-3}$, faar man ved efterhaanden at ombytte det til dens Bestemmelse overflødige Punkt Q med de endnu tilbageværende, at den samme Kurve gaar gjennem dem alle. Det samme vilde endog være Tilfældet med uendelig mange Kurver $\mu_{m_1+m_2-n-3}$, hvis ingen Kombination gav en fuldkommen Bestemmelse; men det følgende viser, at dette Tilfælde ikke kan indtræde.

Vi have her som en nødvendig Betingelse for, at i en Punktgruppe (P), som henhører til Skjæringspunk-

terne mellem to Kurver af Ordnerne m_1 og m_2, l (passende valgte) af Punkterne ligge paa enhver Kurve af Ordenen n, som er $\geqq m_1$ og $\geqq m_2$, gjennem de øvrige, fundet den, at der gjennem alle de andre Skjæringspunkter (Q) mellem de samme givne Kurver og $l-1$ vilkaarlige Punkter af Planen, kan lægges en Kurve af Ordenen $m_1 + m_2 - n - 3$.

Det skal nu vises, at denne Betingelse ogsaa er tilstrækkelig og altsaa kan benyttes som Kjendetegn.

Dette opnaas ligeledes ved gjennem Punkterne $(P) + (Q)$ at lægge en Kurve af Ordenen $m_1 + m_2 - 3$, sammensat af en Kurve $\nu_{m_1+m_2-n-3}$ af Ordenen $m_1 + m_2 - n - 3$ og en Kurve χ_n af n'te Orden. Den første kan bringes til foruden igjennem Punkterne (Q) at gaa igjennem $l-1$ af Punkterne (P), hvis samlede Antal vi som før ville kalde $k + l$. At den ikke derved bringes til at gaa igjennem alle Punkterne (P) følger af, at dens Orden er mindre end m_1 og m_2. For at den anden Kurve χ_n skal gaa gjennem de manglende $k+1$ Punkter (P), er det altsaa tilstrækkeligt at lade den gaa gjennem k blandt dem. Idet man paa denne Maade kan udtage alle Kombinationer paa $k+1$ Punkter, faas, at samtlige Punkter (P) virkelig kun give k indbyrdes uafhængige Bestemmelser af en Kurve af n'te Orden.

Blandt specielle Tilfælde af den beviste Sætning kan mærkes det, hvor $n = m_2$, eller hvor man allerede har lagt en Kurve af n'te Orden gjennem den givne Gruppe (P). Det bliver da en Kurve af Ordenen $m_1 - 3$, som skal gaa gjennem Punkterne (Q) og $l-1$ Punkter af Planen. —

Ifølge en Forudsætning, som vi have maattet opstille, er der dog en vis Art af indbyrdes Afhængighed mellem den givne Gruppes Punkter, som man ikke umiddelbart udleder af de opstillede Kjendetegn, nemlig den, hvor enhver Kurve af n'te Orden derigjennem indeholder en fast Kurve χ_r. Denne vil nemlig da ogsaa udgjøre en Del baade af ψ_{m_1} og af ψ_{m_2}. For at sikre sig imod, at dette Tilfælde, der, naar det opdages, væsentlig simplificerer Opgaven, skal forblive ubemærket, maa man for alle Værdier

af $r \overline{\gtrless} n$ undersøge, om nogen Kurve χ_r indeholder mere end $rn - \frac{(r-1)(r-2)}{2}$ af de givne Punkter. Den omspurgte Deling vil da finde Sted, hvis der ikke mellem disse Punkter, som man om fornødent kan dele i mindre Grupper, finder saadanne Afhængigheder Sted, som reducere Antallet af indbyrdes uafhængige Punkter til den opgivne Værdi. Ved Undersøgelsen heraf kan den fundne Sætning benyttes.

Overalt, hvor der er Anledning til at benytte den, giver den en virkelig Reduktion, da Ordenen $m_1 + m_2 - n - 3$, af den Kurve, om hvilken det skal undersøges, hvormange indbyrdes uafhængige Bestemmelser den ny Gruppe (Q) giver, er mindre end n.

INTERPOLATION OG INTEGRATION VED RÆKKER.

(AF F. BUCHWALDT).

§ 1. Vi ville tænke os den Funktion $F(x)$, som i et givet Interval for x skal udvikles i en konvergent Række, der har en for Interpolation og Integration bekvem Form, fremstillet som en Kurve i et retvinklet Koordinatsystem med x som Abscisse og $F(x)$ som Ordinat. Hvis der i det givne Interval findes et eller flere Punkter, i hvilke enten $F(x)$ tilligemed $F'(x)$, $F''(x)$,... eller i Almindelighed $F^{(r)}(x)$ tilligemed $F^{(r+1)}(x)$, $F^{(r+2)}(x)$,.. er uendelig, saa deles Intervallet i 2 eller flere Intervaller saaledes, at der i hvert af disse mindre Intervaller kun bliver et af disse særegne Punkter, som kommer til at ligge ved Intervallets ene Grænse, og hvis Abscisse vi ville betegne ved g, medens Abscissen til Intervallets andet Endepunkt betegnes ved $(g + h)$, hvori h er positiv eller negativ. De samme Betegnelser anvendes for Abscisserne til Endepunkterne i det oprindelig givne Interval, naar dette ikke deles. Hvis der til $x = g$ svarer et særegent Punkt, anvendes bedst Substitutionen:

$$x = g + h \,.\, t.$$

I modsat Fald bruges helst Substitutionen:

$$x = g + \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} h \cdot t;$$

men for at kunne udvikle Formler, fælles for begge Tilfælde, ville vi sammenfatte begge Substitutioner i den ene:

$$x = g + \frac{i-1}{i} h + \frac{h}{i} \cdot t, \tag{1}$$

saa at $t = -(i-1)$ er svarende til $x = g$, $t = +1$ til $x = g + h$, og man vælger at sætte $i = 1$ eller $i = 2$, eftersom der til $x = g$ svarer et særegent Punkt $(F^{(r)}(g) = \infty)$ eller ikke.

Vi ville dernæst forudsætte, at $F(x)$ i Intervallet

$$-(i-1) \leqq t \leqq 1$$

kan udvikles i en konvergent Række, hvis Koefficienter man ikke behøver at kjende, men hvis Form maa, idet der til $x = g$, $t = -(i-1)$, skal kunne svare et særegent Punkt, i Almindelighed kunne angives ved

$$F(x) = F\left(g + \frac{i-1}{i} h + \frac{h}{i} t\right) =$$
$$(t+i-1)^{\alpha_1}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots)$$
$$+ (t+i-1)^{\alpha_2}(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \ldots)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

hvori enhver af Rækkerne, indeholdende henholdsvis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, maa betragtes for sig. $F(x)$ kommer saaledes til at bestaa af en Sum af Funktioner $Z = f(x)$, der antages at ville kunne udvikles i konvergent Række saaledes

$$\left.\begin{array}{l} Z = f(x) = f\left(g + \frac{i-1}{i} h + \frac{h}{i} t\right) = \\ \qquad (t+i-1)^{\alpha}(C_0 + C_1 t + \ldots + C_r t^r + \ldots), \end{array}\right\} \tag{2}$$

hvori α ikke er positiv hel, men iøvrigt kan have en hvilken som helst anden Værdi, ogsaa 0. Dog er det klart, at Rækken (2), saa vel som enhver paa denne bygget Interpolationsrække, ikke kan benyttes til Bestemmelsen af $f(g)$, svarende til $t = -(i-1)$, med mindre α er > 0, hvorimod Bestemmelsen af $\int_g^{g+h} Z\,dx = \frac{h}{i}\int_{-(i-1)}^{1} Z\,dt$ ikkun fordrer, at α er > -1, naar C_0 ikke er $= 0$, eller, hvis C_0, C_1, ... og C_{r-1} ere $= 0$, ikkun, at α er $> -(r+1)$. Naar α er $= 0$, tages $i = 2$; i modsat Fald sættes $i = 1$.

Betegne vi Faktoren til $(t+i-1)^a$ i (2) ved Y, altsaa naar

$$Y = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots, \tag{3}$$

$$Z = f(x) = (t+i-1)^a \,.\, Y \text{ og } \int_g^{g+h} Z\,dx = \frac{h}{i}\int_{-(i-1)}^{1} (t+i-1)^a\, Y\,dt, \tag{4}$$

saa vil Konvergensbetingelsen $Lim_r \frac{C_{r+1}}{C_r} < 1$ for Rækken (3) med Nødvendighed fordre, at man, idet p er et endeligt helt Tal, i numerisk Henseende har

$$C_p > C_{p+1} > C_{p+2} > \ldots,$$

for saa vidt ikke enkelte af disse Koefficienter ere $= 0$ og saaledes helt bortfalde af Rækken. Størrelserne C_p, C_{p+1}, ... saa vel som ethvert af de Produkter, i hvilke de i det følgende indgaa enkeltvis som Faktor af 1ste Grad, ville vi betegne som Størrelser af henholdsvis p'te, $(p+1)$'te, ... Orden.

Idet vi nu antage, at n er $\geqq p$, altsaa at C_n er en Størrelse af n'te Orden, vil $(n-1)$'te Grads Funktionen

$$\overset{(n)}{y} = D_0 + D_1 \,.\, t + D_2 \,.\, t^2 + \ldots + D_{n-1} \,.\, t^{n-1}, \tag{4}$$

hvori Koefficienterne D ere bestemte saaledes, at $\overset{(n)}{y}$ er $= Y$ for de n Værdier t_1, t_2, ... t_n af t, eller idet

$$x_r = g + \frac{i-1}{i} h + \frac{h}{i} \,.\, t_r,$$

for de n Værdier x_1, x_2, ... x_n af x, være en approximativ Værdi af Y, hvis Korrektion eller Fejl

$$\overset{(n)}{v} = Y - \overset{(n)}{y} \tag{5}$$

vil vise sig at være af n'te Orden. De til $t = t_r$, eller $x = x_r$, svarende Værdier af Y og $\overset{(n)}{y}$ betegnes ved Y_r og $\overset{(n)}{y}_r$, og vi have altsaa $Y_r = \overset{(n)}{y}_r$ og $\overset{(n)}{v}_r = 0$ for $r = 1, 2, \ldots n$, eller $r \leqq n$, hvorimod $\overset{(n)}{v}_r$ for $r \geqq (n+1)$ eller i Almindelighed $\overset{(n)}{v}$ for enhver anden Værdi af t end t_1, t_2, ... t_r er en ikke forsvindende Størrelse af n'te Orden.

Den ofte besværlige Bestemmelse af Koefficienterne D i (4) ved n Ligninger af Formen

$$Y_r = D_0 + D_1 \cdot t_r + \dots + D_{n-1} \cdot t_r^{n-1},$$

undgaas ved Lagranges bekjendte Formel, som, naar man sætter

$$\left.\begin{array}{ll} & \varphi(n, t) = (t - t_1)(t - t_2)\dots(t - t_n) \\ \text{og} & \varphi_r(n, t) = \dfrac{\varphi(n, t)}{t - t_r}, \\ \text{antager Formen} & \\ & \overset{(n)}{y} = \sum\limits_{r=1}^{r=n} \dfrac{\varphi_r(n, t)}{\varphi_r(n, t_r)} Y_r. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Denne Formel er dog ikke bekvem, hverken til Beregningen af Y eller til Bestemmelsen af $\int_g^{g+h} Z\,dx = \frac{h}{i} \int_{-(i-1)}^{1} (t + i - 1)^\alpha\, Y\,dt$, hvorimod den ganske vist for $\alpha = 0$ ($i = 2$) kan anvendes med Fordel til Beregningen af $\frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} Y\,dt$, naar man forud en Gang for alle har fundet Værdierne af Integralerne: $\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_r(n, t)}{\varphi_r(n, t_r)}\,dt$ for ganske bestemte Værdier af $t_1, t_2, \dots t_n$.

I Almindelighed vil der haves en lettere anvendelig Interpolationsformel i

$$\overset{(n)}{y} = J_0 + (t - t_1) \cdot J_1 + (t - t_1)(t - t_2) \cdot J_2 + \dots$$
$$+ (t - t_1)(t - t_2)\dots(t - t_{n-1}) \cdot J_{n-1},$$

naar først Interpolationskoefficienterne J ere blevne beregnede. Dette kunde ske ved at sætte $t = t_1$, som giver $J_0 = Y_1$, derpaa $t = t_2$, hvorved J_1 bestemmes, o. s. v. indtil $t = t_n$, hvorved J_{n-1} bestemmes; men Beregningen kan ogsaa opstilles tabellarisk. Man finder nemlig efterhaanden

$$J_0 = Y_1,\ J_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1} = Y_1^{[1]},$$

$$J_2 = \frac{\dfrac{Y_3 - Y_2}{t_3 - t_2} - \dfrac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1}}{t_3 - t_1} = \frac{Y_2^{[1]} - Y_1^{[1]}}{t_3 - t_1} = Y_1^{[2]},$$

. . . . ,

som leder til at sætte

$$Y_p^{[r]} = \frac{Y_{p+1}^{[r-1]} - Y_p^{[r+1]}}{t_{r+p} - t_p}. \tag{7}$$

$Y_p^{[r]}$ ville vi kalde: »Interpolationskoefficienten af r'te Orden for Y ved Udgang fra t_p«. $J_r = Y_1^{[r]}$ bliver da Interpolationskoefficienten af r'te Orden for Y ved Udgang fra t_1.

Den tabellariske Beregning af Interpolationskoefficienterne udføres bedst saaledes:

t	Y	$Y^{[1]}$	$Y^{[2]}$	$Y^{[3]}$	
t_1	Y_1				
		$\frac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1} = Y_1^{[1]}$			
t_2	Y_2		$\frac{Y_2^{[1]} - Y_1^{[1]}}{t_3 - t_1} = Y_1^{[2]}$		
$\vdots$		$\frac{Y_3 - Y_2}{t_3 - t_2} = Y_2^{[1]}$		$\frac{Y_2^{[2]} - Y_1^{[2]}}{t_4 - t_1} = Y_1^{[3]}$	$\cdots$
t_3	Y_3		$\frac{Y_3^{[1]} - Y_2^{[1]}}{t_4 - t_2} = Y_2^{[2]}$	$\vdots$	
		$\frac{Y_4 - Y_3}{t_4 - t_3} = Y_3^{[1]}$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
t_4	Y_4	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots\ Y_{n-3}^{[3]}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots\ Y_{n-2}^{[2]}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots\ Y_{n-1}^{[1]}$			
t_n	Y_n	$\cdots$			

Det Led, der sidst bliver beregnet og kommer til at staa i Trekantens Spids tilhøjre, er $Y_1^{[n-1]}$, og, vil man have en Kontrol for Regningens Rigtighed, saa behøver man kun at beregne én Skraarække til, idet man som t_{n+1} benytter Værdien for t_1. Den fra t_2 nedad tilhøjre udgaaende Skraarække vil da komme til at ende med $Y_2^{[n-1]}$, som for $t_{n+1} = t_1$ skal være $= Y_1^{[n-1]}$. Det er nemlig en Selvfølge, at Abscisserne $t_1, t_2, \ldots t_n$ ikke behøve at være ordnede efter deres Størrelse. Iblandt n givne Abscisseværdier kan man tage en hvilken som helst til Udgangsværdi og

betegne den ved t_1 og ordne de øvrige $(n-1)$ Abscisser paa vilkaarlig Maade; Værdien for Interpolationskoefficienten af $(n-1)$'te Orden forbliver stedse uforandret. Dette er vistnok umiddelbart indlysende; men vil iøvrigt senere blive bevist.

Naar vi nu, i Overensstemmelse med den 1ste Formel (6), indføre Betegnelserne

$$\varphi(0,t) = 1,$$
$$\varphi(1,t) = \varphi(0,t)\,.\,(t-t_1) = t + \overset{(1)}{a}_1,$$
$$\varphi(2,t) = \varphi(1,t)\,.\,(t-t_2) = t^2 + \overset{(2)}{a}_1\, t + \overset{(2)}{a}_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(r,t) = \varphi(r-1,t)\,.\,(t-t_r) = t^r + \overset{(r)}{a}_1\, t^{r-1} + \overset{(r)}{a}_2\, t^{r-2} + \ldots + \overset{(r)}{a}_r, \tag{8}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

saa bliver

$$\overset{(n)}{y} = Y_1 + \varphi(1,t)\,Y_1^{[1]} + \varphi(2,t)\,Y_1^{[2]} + \ldots + \varphi(n-1,t)\,Y_1^{[n-1]}, \tag{9}$$

og, vil man derfra gaa over til $\overset{(n+1)}{y}$, som er Ordinaten i den Kurve, der foruden at indeholde de samme n Punkter (t_1, Y_1), (t_2, Y_2), ... (t_n, Y_n) som den Kurve, hvortil $\overset{(n)}{y}$ er Ordinaten, desuden indeholder Punktet (t_{n+1}, Y_{n+1}), saa faas efter Beregningen af $Y_1^{[n]}$

$$\overset{(n+1)}{y} = \overset{(n)}{y} + \varphi(n,t)\,.\,Y_1^{[n]}$$

eller, idet $\quad Y = \overset{(n+1)}{y} + \overset{(n+1)}{v} = \overset{(n)}{y} + \overset{(n)}{v},$

$$\overset{(n+1)}{y} - \overset{(n)}{y} = \overset{(n)}{v} - \overset{(n+1)}{v} = \varphi(n,t)\,.\,Y_1^{[n]}. \tag{10}$$

Da det kan bevises, at $Y_1^{[n]}$ er en Størrelse af samme Orden som C_n, altsaa af n'te Orden, saa giver (10) en, numerisk bestemt, approximativ Værdi af n'te Orden for Fejlen $\overset{(n)}{v}$ paa $\overset{(n)}{y}$. Ogsaa i denne Henseende viser saaledes Formlen (9) sig at være langt hensigtsmæssigere end Lagranges Formel (6).

Hvis det kan antages, at den numeriske Aftagen af Leddene i Rækken (3) indtræder senest ved Leddet $C_{n-1}\, t^{n-1}$, saa at C_{n-1} er en Størrelse af $(n-1)$'te Orden, og man ønsker at spare sig

Beregningen af Y_{n+1} og derved af $Y_1^{[n]}$, saa kan man i (10) i Stedet for $Y_1^{[n]}$ indsætte $Y_1^{[n-1]}$, som er bekjendt, saa at man i numerisk Henseende faar

$$\overset{(n)}{v} < \varphi(n, t) \,.\, Y_1^{[n-1]}, \tag{10'}$$

som giver en skarpere Bestemmelse for Fejlens højere Grænse end den, der vilde angives ved det sidste Led af Rækken (9), multipliceret med i, idet i numerisk Henseende

$$\varphi(n, t) = \varphi(n-1, t) \,.\, (t - t_n) \leqq \varphi(n-1, t) \,.\, i.$$

At i Almindelighed $Y_1^{[r]}$ er en Størrelse af r'te Orden, naar C_r er af r'te Orden, bevises ved at udtrykke $Y_1^{[r]}$ ved Koefficienterne C 1 (3). Hertil benyttes denne Formel i Forbindelse med (7). Man finder efterhaanden

$$Y_1^{[1]} = \frac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1} = C_1 + C_2(t_1 + t_2) + C_3(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) + \ldots$$

$$Y_1^{[2]} = \frac{Y_2^{[1]} - Y_1^{[1]}}{t_3 - t_1} = C_2 + C_3(t_1 + t_2 + t_3) + \ldots,$$

hvorved man ledes til Formlerne

$$\left.\begin{aligned}
Y_1^{[r-1]} &= C_{r-1} + C_r.\overset{(r)}{b}_1 + C_{r+1}.\overset{(r)}{b}_2 + \ldots + C_{r-1+p}.\overset{(r)}{b}_p + \ldots, \\
\overset{(r)}{b}_1 &= t_1 + t_2 + \ldots + t_r, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overset{(r)}{b}_p &= t_1^p + t_1^{p-1} t_2 + \ldots + t_r^p = \\
&\Sigma\, t_1^{(s_1 - s_2)} t_2^{(s_2 - s_3)} \ldots t_{r-1}^{(s_{r-1} - s_r)} t_r^{(s_r - s_1 + p)}, \\
\text{idet}\quad & s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \ldots \geqq s_r \geqq s_1 - p,
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

hvis Rigtighed bevises ved Induktion. $\overset{(r)}{b}_p$, der kan udtrykkes ved Koefficienterne $\overset{(r)}{a}$ i (8), er altsaa, umiddelbart udtrykt ved $t_1, t_2, \ldots t_r$, en Sum af Produkter af p Faktorer, tagne paa alle mulige Maader blandt disse r Størrelser og saaledes, at enhver af Faktorerne kan gjentages og i saa Fald regnes for lige saa mange enkelte Faktorer. Hvis alle Abscisserne t_1, t_2, . . . t_r havde samme Værdi, eller hvis $t_2 = t_1 + dt$, $t_3 = t_1 + 2dt$, $\ldots t_r = t_1 + (r-1)\,dt$,

vilde $\overset{(r)}{b}_p$ erholde sin med Hensyn til t_1 størst mulige Værdi, nemlig, i Følge Formlen for Antallet af Kombinationer med Elementernes Gjentagelse

$$\frac{[r-1+p]}{[r-1][p]}t_1^p = \frac{r(r+1)\ldots(r+p-1)}{1.2\ldots p}t_1^p,$$

som vilde give

$$Y_1^{[r-1]} = \frac{1}{[r-1]}\left([r-1]C_{r-1} + \frac{[r]}{[1]}C_r t_1 + \frac{[r+1]}{[2]}C_{r+1}t_1^2 + \ldots\right) = \frac{1}{[r-1]}\left(\frac{d^{r-1}Y}{dt^{r-1}}\right)_1 = \frac{1}{[r-1]}Y_1^{(r-1)}.$$

Hvis altsaa Koefficienterne C_r, C_{r+1}, . . . i (3) alle have samme Tegn, maa Interpolationskoefficienten af r'te Orden $Y_1^{[r]}$ altid i numerisk Henseende være mindre end $\frac{1}{[r]}Y_1^{(r)}$. Ligesom $t_2 = t_1 + dt$, $t_3 = t_1 + 2dt, \ldots t_r = t_1 + (r-1)\,dt$ vilde bringe Rækken (9) paa Formen

$$\overset{(n)}{y} = Y_1 + \frac{t-t_1}{[1]}Y_1' + \frac{(t-t_1)^2}{[2]}Y_1'' + \ldots + \frac{(t-t_1)^{r-1}}{[r-1]}Y_1^{(r-1)} +$$
$$(t-t_1)^r\Big(Y_1^{[r]} + (t-t_{r+1})\,Y_1^{[r+1]} + \ldots$$
$$+ (t-t_{r+1})(t-t_{r+2})\ldots(t-t_{n-1})\,Y_1^{[n-1]}\Big),$$

hvis første r Led ere sammenfaldende med de første r Led af Taylors Række, saaledes ses det let, at $t_2 = t_1 + \triangle t$, $t_3 = t_1 + 2\,.\triangle t, \ldots t_r = t_1 + (r-1)\,.\triangle t$, vilde bringe de første r Led af Rækken (9) til at falde sammen med de første r Led af den bekjendte Interpolationsformel for Y ved konstante Differenser $\triangle t$ for t. Sættes nemlig $Y_2 - Y_1 = \triangle Y_1, \ldots Y_r - Y_{r-1} = \triangle Y_{r-1}$, $\triangle Y_2 - \triangle Y_1 = \triangle^2 Y_1, \ldots \triangle^{r-2}Y_2 - \triangle^{r-2}Y_1 = \triangle^{r-1}Y_1$, faas ifølge (7):

$$Y_1^{[1]} = \frac{\triangle Y_1}{1\,.\triangle t},\quad Y_1^{[2]} = \frac{\triangle^2 Y_1}{1\,.\,2\,.(\triangle t)^2}, \ldots Y_1^{[r-1]} = \frac{\triangle^{r-1}Y_1}{[r-1](\triangle t)^{r-1}},$$

og ifølge (8):

$$\varphi(1,t) = (t-t_1),\ \varphi(2,t) = (t-t_1)(t-t_1-\triangle t), \ldots \varphi(r-1,t) =$$
$$(t-t_1)(t-t_1-\triangle t)(t-t_1-2\triangle t)\ldots(t-t_1-(r-1)\triangle t),$$

som, indsatte i (9), give de første r Led af Interpolationsformlen ved Æqvidifferenserne $\triangle t$.

Da Værdien af $\overset{(r)}{b}_p$ ikke forandres derved, at Ordningen i Rækkefølge for de r Abscisseværdier forandres, saa vil dette heller ikke blive Tilfældet med Værdien af $Y^{[r-1]}$, der vil forblive den samme, hvad enten den ene eller den anden af Abscisseværdierne tages som Udgangsværdi og betegnes som t_1. Deri ligger det, at den tabellariske Beregning af Interpolationskoefficienterne kan kontrolleres paa den foran anførte Maade.

Beregningen af Størrelserne $\overset{(r)}{b}_p$ umiddelbart ved Abscisserne $t_1, t_2 \ldots t_r$ kunde udføres efterhaanden saaledes:

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
\overset{(1)}{b}_1 = t_1 & \overset{(2)}{b}_1 = t_2 + \overset{(1)}{b}_1 & \overset{(3)}{b}_1 = t_3 + \overset{(2)}{b}_1 & \ldots \overset{(n)}{b}_1 = t_n + \overset{(n-1)}{b}_1 \\
\overset{(1)}{b}_2 = t_1^2 & \overset{(2)}{b}_2 = t_2 \overset{(2)}{b}_1 + \overset{(1)}{b}_2 & \overset{(3)}{b}_2 = t_3 \overset{(3)}{b}_1 + \overset{(2)}{b}_2 & \ldots \overset{(n)}{b}_2 = t_n \overset{(n)}{b}_1 + \overset{(n-1)}{b}_2 \\
\overset{(1)}{b}_3 = t_1^3 & \overset{(2)}{b}_3 = t_2 \overset{(2)}{b}_2 + \overset{(1)}{b}_3 & \overset{(3)}{b}_3 = t_3 \overset{(3)}{b}_2 + \overset{(2)}{b}_3 & \ldots \overset{(n)}{b}_3 = t_n \overset{(n)}{b}_2 + \overset{(n-1)}{b}_3 \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\overset{(1)}{b}_p = t_1^p & \overset{(2)}{b}_p = t_2 \overset{(2)}{b}_{p-1} + \overset{(1)}{b}_p & \overset{(3)}{b}_p = t_3 \overset{(3)}{b}_{p-1} + \overset{(2)}{b}_p & \ldots \overset{(n)}{b}_p = t_n \overset{(n)}{b}_{p-1} + \overset{(n-1)}{b}_p
\end{array}\right\} (11')$$

Fejlen $\overset{(n)}{v} = Y - \overset{(n)}{y}$ paa $\overset{(n)}{y}$ maa, ifølge (9), have Formen

$$\overset{(n)}{v} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \varphi(n+p, t)\, Y_1^{[n+p]},$$

hvori $t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots$, der bestemme Værdierne af $Y_1^{[n]}$, $Y_1^{[n+1]}, \ldots$, kunne gives ganske vilkaarlige Værdier. Vi ville da sætte $t_{n+1} = dt$, $t_{n+2} = 2\,dt, \ldots t_{n+p} = p\,dt, \ldots$, som ifølge (11) giver

$$\overset{(n+p)}{b}_1 = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \overset{(n)}{b}_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{(n+p)}{b}_q = t_1^q + t_1^{q-1} t_2 + \ldots + t_n^q = \overset{(n)}{b}_q,$$

$$Y_1^{[n+p]} = C_{n+p} + C_{n+p+1} \cdot \overset{(n)}{b}_1 + C_{n+p+2} \cdot \overset{(n)}{b}_2 + \ldots$$
$$+ C_{n+p+r} \cdot \overset{(n)}{b}_r + \ldots$$

og, ifølge (8), $\qquad \varphi(n+p, t) = \varphi(n, t) \,.\, t^p.$

Indsættes disse Værdier i oven staaende Udtryk for $\overset{(n)}{v}$, og ordnes derpaa Rækken efter Leddenes Størrelsesorden, der jo angives ved Indices for Koefficienterne C, saa erholdes

$$\left.\begin{aligned}\overset{(n)}{v} = \varphi(n,t)\,.\Big\{C_n + C_{n+1}\,(t + \overset{(n)}{b}_1) + \ldots \\ + C_{n+p}\,(t^p + \overset{(n)}{b}_1\,t^{p-1} + \overset{(n)}{b}_2\,t^{p-2} + \ldots + \overset{(n)}{b}_p) + \ldots\Big\}\end{aligned}\right\}(12)$$

Fejlen $\overset{(n)}{v}$ er saaledes af n'te Orden og forsvinder for $t = t_1$, $t_2, \ldots t_n$, hvilke n Værdier af t ere Rødderne i $\varphi(n,t) = 0$.

Størrelserne $\overset{(r)}{b}_p$, der ved Formlen (11) ere udtrykte umiddelbart ved Abscisserne $t_1, t_2, \ldots t_r$, kunne ogsaa udtrykkes ved Koefficienterne $\overset{(r)}{a}_1, \overset{(r)}{a}_2, \ldots \overset{(r)}{a}_r$ i (8).

Man har nemlig, ifølge (12), (8) og (3),

$$\overset{(r)}{v} = (t^r + \overset{(r)}{a}_1\,t^{r-1} + \overset{(r)}{a}_2\,t^{r-2} + \ldots + \overset{(r)}{a}_r)\,.$$

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} C_{r+p}\,(t^p + \overset{(r)}{b}_1\,t^{p-1} + \overset{(r)}{b}_2\,t^{p-2} + \ldots + \overset{(r)}{b}_p)$$

og
$$Y = \sum_{q=0}^{q=r-1} C_q\,t^q + \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{r+p}\,t^{r+p},$$

og, da $y = Y - \overset{(r)}{v}_r$ er en Funktion af Graden $(r-1)$ med Hensyn til t, maa Koefficienterne til t^r, t^{r+1}, t^{r+p} i de Led, der ere multiplicerede med C_{r+p}, være $= 0$. Man faar derfor, ved efterhaanden at sætte $p = 0, 1, 2, \ldots$, Betingelserne

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(r)}{a}_1 + \overset{(r)}{b}_1 = 0\\
&\overset{(r)}{a}_2 + \overset{(r)}{b}_1\overset{(r)}{a}_1 + \overset{(r)}{b}_2 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\overset{(r)}{a}_r + \overset{(r)}{b}_1\overset{(r)}{a}_{r-1} + \overset{(r)}{b}_2\overset{(r)}{a}_{r-2} + \ldots + \overset{(r)}{b}_{r-1}\overset{(r)}{a}_1 + \overset{(r)}{b}_r = 0\\
&\quad \overset{(r)}{b}_1\overset{(r)}{a}_r + \overset{(r)}{b}_2\overset{(r)}{a}_{r-1} + \ldots + \overset{(r)}{b}_r\overset{(r)}{a}_1 + \overset{(r)}{b}_{r+1} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad \overset{(r)}{b}_p\overset{(r)}{a}_r + \overset{(r)}{b}_{p+1}\overset{(r)}{a}_{r-1} + \ldots + \overset{(r)}{b}_{p+r-1}\overset{(r)}{a}_1 + \overset{(r)}{b}_{p+r} = 0\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}(13)$$

der dog neppe ville kunne faa nogen Anvendelse i Praxis.

Medens Formlen (9), ifølge (10), giver en forholdsvis let og

simpel Overgang fra $\overset{(n)}{y}$ til $\overset{(n+1)}{y}$, er dette ingenlunde Tilfældet med Lagranges Formel (6). Denne giver nemlig

$$\overset{(n+1)}{y} - \overset{(n)}{y} = \overset{(n)}{v} - \overset{(n+1)}{v} = \varphi(n,t) \sum_{r=1}^{r=n+1} \frac{Y_r}{\varphi_r(n+1, t_r)},$$

som, trods sin simple Form, vilde give en meget besværlig Regning. Sammenlignes denne Formel med (10), faas

$$Y_1^{[r-1]} = \sum_{q=1}^{q=r} \frac{Y_q}{\varphi_q(r, t_q)}. \qquad (14)$$

Da $Y_1^{[r-1]}$ ifølge (11) er $= 0$, naar Y er $= C_p t^p$ og $p \leq (r-2)$, faas

$$\sum_{q=1}^{q=r} \frac{t_q^p}{\varphi_q(r, t_q)} = 0 \text{ for } p \leq r-2,$$

og, indsættes derfor i (14) Rækkeudviklingen for Y_q ifølge (3), faas

$$Y_1^{[r-1]} = \sum_{q=1}^{q=r} \frac{C_{r-1} t_q^{r-1} + C_r t_q^r + \ldots + C_{r-1+p} t_q^{r-1+p} + \ldots}{\varphi_q(r, t_q)};$$

som, sammenholdt med den 1ste (11), viser, at $\overset{(r)}{b}_p$ kan udtrykkes umiddelbart ved Abscisserne $t_1, t_2, \ldots t_r$ under en anden Form end den, der angives ved den sidste (11), nemlig ogsaa saaledes

$$\overset{(r)}{b}_p = \sum_{q=1}^{q=r} \frac{t_q^{r-1+p}}{\varphi_q(r, t_q)}, \qquad (15)$$

hvorved maa erindres, at $\overset{(r)}{b}_0 = 1$, og at

$$\overset{(r)}{b}_{-1} = \overset{(r)}{b}_{-2} = \overset{(r)}{b}_{-3} = \ldots = 0.$$

Formlerne (14) og (15) have Interesse, for saa vidt som de tjene til nærmere at belyse Sammenhængen mellem de foregaaende Formler; men for de praktiske Anvendelser ere de vistnok uden Betydning.

Ifølge (4) og (5) bliver

$$\left.\begin{aligned} Z &= (t+i-1)^a . \overset{(n)}{y} + (t+i-1)^a . \overset{(n)}{v} \\ \text{og } \int_g^{g+h} Z dx &= \frac{h}{i} \int_{-(i-1)}^{1} (t+i-1)^a . \overset{(n)}{y} . dt + \frac{h}{i} \int_{-(i-1)}^{1} (t+i-1)^a . \overset{(n)}{v} . dt, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

hvori Udtrykkene for $\overset{(n)}{y}$ og $\overset{(n)}{v}$, ifølge (8) og (12), indsættes. I højre Side af Formlerne (16) er det 2det Led Korrektionen til, eller Fejlen paa det 1ste Led.

(Fortsættes).

EN FUNKTIONALLIGNING (OPGAVE 502).

(AF J. L. W. V. JENSEN).

I sidste Hefte af Tidsskriftets forrige Aargang har Hr. A. S. Bang forsøgt at løse Opgave Nr. 502, hvis Ordlyd er følgende:

Bestem de entydige analytiske Funktioner, som tilfredsstille Funktionalligningen

$$f(x+y) = af(x) \cdot f(y) + bf(x+\omega) \cdot f(y+\omega),$$

hvor a, b og ω ere givne Konstanter, forskjellige fra Nul.

Da Hr. Bangs Løsning er grundet paa den stiltiende og aldeles uberettigede Forudsætning, at $f(\omega)$ (og $1 - af(0)$) ikke kan være Nul eller uendelig, og i øvrigt er meget ufuldstændig, skal jeg i det følgende vise, hvorledes Opgaven kan løses exakt ved rent elementære Betragtninger. (Smlgn. Aarg. 1878, S 154).

For Kortheds Skyld benytter jeg følgende Betegnelser:

$$f(x) = X,\ f(x+\omega) = X_1,\ f(x+2\omega) = X_2;\ f(y) = Y,\ f(y+\omega) = Y_1,$$
$$f(y+2\omega) = Y_2;\ f(x+y) = U,\ f(x+y+\omega) = U_1.$$

Af Funktionalligningen

$$U = aXY + bX_1Y_1 \tag{A}$$

udledes ved at give x eller y Tilvæxten ω

$$U_1 = aX_1Y + bX_2Y_1 = aXY_1 + bX_1Y_2, \tag{B}$$

som under den Forudsætning, at ikke $X_1 = 0$, giver os

$$\frac{bX_2 - aX}{X_1} = \frac{bY_2 - aY}{Y_1} = k, \tag{C}$$

hvor k er en Konstant. Tilfældet $X_1 = 0$ ses imidlertid at tilfredsstille (A), saa at

$$X = 0$$

er den **første Løsning** af Funktionalligningen.

Ved Hjælp af (C) omskrives (B) til

$$U_1 = aX_1Y + aXY_1 + kX_1Y_1,$$

som ved at kombineres med (A) giver

$$aU + \alpha U_1 = (aX + \alpha X_1)(aY + \alpha Y_1), \tag{D}$$

naar α bestemmes saaledes, at den tilfredsstiller den anden Grads Ligning

$$k\alpha + ab = \alpha^2, \tag{E}$$

hvis Rødder i det følgende betegnes ved α' og α''.

Da $aX + \alpha X_1$ ifølge Forudsætningen skal være en entydig analytisk Funktion af x og ifølge (D) tilfredsstiller en Funktionalligning af Formen

$$F(x + y) = F(x) . F(y),$$

hvis eneste **analytiske** Opløsninger som bekjendt ere

$$F(x) = 0 \text{ og } F(x) = e^{cx}, \ (c \text{ en vilkaarlig Konstant}),$$

haves til Bestemmelse af X, idet (E) foreløbig antages ikke at have lige Rødder, enten

$$\left.\begin{aligned} aX + \alpha' X_1 &= e^{cx} \\ aX + \alpha'' X_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{F}$$

eller

$$\left.\begin{aligned} aX + \alpha' X_1 &= e^{cx} \\ aX + \alpha'' X_1 &= e^{c'x}. \end{aligned}\right\} \tag{G}$$

c' er en ny Konstant, som nedenfor vil blive bestemt ved c. Kombinationen $aX + \alpha' X_1 = 0$, $aX + \alpha'' X_1 = 0$, fører kun tilbage til den første Løsning.

Af (F) følger

$$X = \frac{\alpha'' e^{cx}}{a(\alpha'' - \alpha')}, \quad X_1 = \frac{e^{cx}}{\alpha' - \alpha''} = \frac{\alpha'' e^{c\omega} . e^{cx}}{a(\alpha'' - \alpha')},$$

hvoraf

$$\alpha'' = -a e^{-c\omega}, \quad \alpha' = -\frac{ab}{\alpha''} = b e^{c\omega},$$

og sluttelig

$$X = \frac{e^{cx}}{a + b e^{2c\omega}},$$

som er den anden Løsning.

Af (G) følger

$$X = \frac{\alpha'' e^{cx} - \alpha' e^{c'x}}{a(\alpha'' - \alpha')},\quad X_1 = \frac{e^{cx} - e^{c'x}}{\alpha' - \alpha''} = \frac{\alpha'' e^{c\omega} e^{cx} - \alpha' e^{c'\omega} e^{c'x}}{a(\alpha'' - \alpha')},$$

hvoraf $\quad \alpha'' = -a e^{-c\omega},\ \alpha' = -a e^{-c'\omega}$

og $$e^{(c+c')\omega} = \frac{a^2}{-ab} = -\frac{a}{b}, \tag{H}$$

og saaledes haves den tredje Løsning.

$$X = \frac{ae^{cx} + be^{2c\omega}\,.\,e^{c'x}}{a\,(a + be^{2c\omega})},$$

hvor c' er bestemt ved c ifølge (H).

Der staar nu blot tilbage at behandle Tilfældet af lige Rødder i Ligningen (E). Til Bestemmelse af X tjener da først

$$aX + \alpha X_1 = e^{cx},\ \text{eller}\ X = \frac{e^{cx} - \alpha X_1}{a}, \tag{I}$$

som ved Indsættelse i (A) med Benyttelse af (E) giver

$$\alpha U_1 = \alpha X_1 e^{cy} + \alpha Y_1 e^{cx},\ \text{eller}\ \frac{U_1}{e^{c(x+y)}} = \frac{X_1}{e^{cx}} + \frac{Y_1}{e^{cy}},$$

der er af Formen $\quad F(x+y) = F(x) + F(y)$.

Denne Funktionallignings eneste analytiske Løsning er

$$F(x) = Cx;$$

derfor maa $\quad X_1 = Cx\,e^{cx},\ X = C(x-\omega)\,e^{-c\omega}\,e^{cx},$

som ifølge (I) giver $C = -\frac{e^{c\omega}}{a\omega}$, eller sluttelig

$$X = -\frac{x - \omega}{a\omega}\,e^{cx},$$

der er den fjerde og sidste Løsning; Tilfældet $aX - \alpha X_1 = 0$ fører nemlig atter tilbage til første Løsning.

Den foreslaaede Opgave er saaledes fuldstændigt løst ved de fire Opløsninger*).

*) a kan ikke være lig Nul, da det forudsættes at a og b ere forskjellige fra Nul.

$$f(x) = 0;$$

$$f(x) = \frac{e^{cx}}{a + be^{2c\omega}};$$

$$f(x) = \frac{1}{a}\,\frac{ae^{cx} + be^{2c\omega}\,e^{c'x}}{a + be^{2c\omega}},\quad c' = \frac{l\left(-\frac{a}{b}\right) + 2n\pi i}{\omega} - c;$$

$$f(x) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)e^{cx},$$

som ere almengyldige; dog maa i den anden og tredie ikke $a + be^{2c\omega} = 0$. Hr. Bangs Løsning er identisk med den anden, de øvrige tre give $f(\omega) = 0$.

Da Hovedpunktet i Hr. Jensens Løsning, den elegante Omskrivning til Formlen (D) synes noget vanskelig at finde, antager jeg, at det ikke vil være uden Interesse at se en anden Løsning, som jeg derfor ganske kort skal antyde.

Man faar af to forskjellige Udtryk for $f(x + y + \omega)$ Ligningen

$$af(x + \omega)f(y) + bf(x + 2\omega)f(y + \omega) = af(x)f(y + \omega) + bf(x + \omega)f(y + 2\omega),$$

der kan omskrives til

$$f(x + \omega)(af(y) - bf(y + 2\omega)) = f(y + \omega)(af(x) - bf(x + 2\omega)). \quad (1)$$

Denne spalter sig i følgende tre

$$f(x + \omega) = 0,\quad af(x) - bf(x + 2\omega) = 0,$$

$$af(x) - bf(x + 2\omega) + 2cf(x + \omega) = 0, \quad (2)$$

hvor c er en arbitrær Konstant.

Den første giver $f(x) = 0$, den anden er indbefattet i den tredie for $c = 0$. Da denne sidste ogsaa vilde fremkomme, hvis første Led i den forelagte Ligning var en vilkaarlig Funktion af $x + y$, giver den en almindeligere Bestemmelse af $f(x)$ end den forelagte, og Resultatet maa derfor prøves ved Indsættelse i denne.

Men nu kan (2) betragtes som en Differensligning, hvor Differensen er ω, og behandles som saadan, idet man tænker sig sat $x = n\omega$ og Differenserne indførte.

Derved faas, idet m er en Konstant, som bestemmes ved Ligningen

$$-bm^{2\omega}+2cm^{\omega}+a=0, \qquad (3)$$

$$f(x)=Am_1^x+Bm_2^x, \qquad (4)$$

naar Rødderne m_1 og m_2 i (2) ere forskjellige, derimod

$$f(x)=Am^x+Bxm^x, \qquad (5)$$

naar (2) har lige Rødder.

En nøjagtig Bestemmelse af Konstanterne fører tilbage til de af Hr. Jensen angivne Løsninger.

(J. P. Gram).

EXAMENSOPGAVER.

Skolelærerexamen. Maj 1887.

Regneopgave Nr. 1. (3 Timer). A kjøber 696 Tdr. 5 Skpr. $1\frac{1}{3}$ Fdkr. Korn til en Pris af 46,20 Kr. for 3 Tdr. $1\frac{3}{5}$ Skp. og betaler Kornet med Obligationer, som Sælgeren modtager til Kurs $96\frac{1}{4}$. Hvis de derimod vare modtagne til den Kurs, hvortil A selv havde kjøbt dem, kunde han for de samme Obligationer have faaet $12\frac{2}{3}$ Tdr. Korn flere.

I. Hvor stor var Obligationernes paalydende Værdi?

II. Til hvad Kurs havde A kjøbt dem?

Ved Rensning svinder Kornet $1\frac{9}{11}$ p. Ct., og naar A's andre Omkostninger lægges til det Beløb, han selv har givet for Obligationerne, staar det rensede Korn ham nu i 16 Kr. pr. Tønde. Han sælger 304 Tdr. efter 3 Maaneder for 17,50 Kr. pr. Tønde, og Resten 1 Maaned senere til en saadan Pris, at hans rene Fortjeneste ved Handelen er 30 p. Ct. p. A. af hans hele Udgift.

III. Hvor meget udgjorde hans andre Omkostninger?

IV. Hvad fik kan for 1 Tønde af det sidst solgte Parti?

Opl. 1. $$\frac{46{,}20}{3\frac{1}{5}}\,.\,696\tfrac{2}{3}=10058\tfrac{1}{8}\text{ Kr.}$$

$$10058\tfrac{1}{8}\,.\,\frac{100}{96\frac{1}{4}}=10450\text{ Kr. (I).}$$

$$\frac{46{,}20}{3\frac{1}{5}}\,.\,12\tfrac{2}{3}=182\tfrac{7}{8};\ 10058\tfrac{1}{8}+182\tfrac{7}{8}=10241.$$

$$\frac{10241}{10058\frac{1}{8}} \cdot 96\tfrac{1}{4} = 98 \text{ (II)}.$$

$$696\tfrac{2}{3} \text{ Kr.} \cdot \frac{98\frac{2}{11}}{100} = 684 \text{ Tdr.}$$

$$684 \cdot 16 = 10944;\ 10944 - 10241 = 703. \text{ (III)}.$$

$$304 \cdot (17\tfrac{1}{2} - 16) = 456 \text{ Kr. (Tjent i 3 Mdr.)}.$$

$$456 \cdot \frac{12}{3} = 1824 \text{ Kr. (Tjent i 1 Aar)}.$$

$$10944 \cdot \frac{30}{100}\ 3283{,}2.$$

$$3283{,}2 - 1824 = 1459{,}2.$$

$$1459{,}2 \cdot \frac{4}{12} = 486{,}4.$$

$$16 + \frac{486{,}4}{380} = 17{,}28 \text{ Kr. (IV)}.$$

Regneopgave Nr. 2. (2 Timer). Fra Begyndelsen af Aaret 1888 vil A den 1. i hver Maaned henlægge Penge i en Sparebøsse, men hver følgende Maaned 10 Øre mere end i den foregaaende.

I. Hvis han 1. December 1889 henlægger 3 Kr. 2 Øre, hvor meget har han da paa dette Tidspunkt i alt i Sparebøssen?

II. Hvis den ved Udgangen af 1889 samlede Sum skal kunne give 2 Kr. 30⅖ Øre i aarlig Rente, udsat til 5⅓ p. Ct. p. A., hvor meget maa han da henlægge 1. Januar 1888, og hvor meget 1. December 1889?

III. Hvor længe vil det vare, inden Sparebøssen i alt indeholder 40,6 Kr., hvis A sidste Gang henlægger 2 Kr. 80 Øre, og hvor meget maa han i saa Fald henlægge 1. Januar 1888?

Opl. 2. $302 = a + 23 \cdot 10;\ a = 72.$

$$s = \frac{72 + 302}{2} \cdot 24 = 4488 \text{ Øre. (I)}.$$

$$230\tfrac{2}{5} \cdot \frac{100}{5\frac{1}{3}} = 4320 = (a + u) \cdot 12.$$

$$u = a + 23 \cdot 10.$$

$$\left.\begin{aligned} u + a &= 360 \\ u - a &= 230 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} a &= 65 \\ u &= 295 \end{aligned}\right\} \text{(II)}.$$

$$4060 = \left(\frac{a + 280}{2}\right) n;\ 280 = a + (n - 1) \cdot 10.$$

$$8120 = an + 280n;\ a = 290 - 10n.$$

$$8120 - 290n - 10n^2 + 280n = -10n^2 + 570n.$$

$$n^2 - 57n = -812;\ n = \frac{57}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{57}{2}\right)^2 - 812} = \frac{57}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 29 \\ 28. \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 280 - 28 \,.\, 10 = 0 \\ a &= 280 - 27 \,.\, 10 = 10 \end{aligned}\right\} \text{(III)}.$$

Regneopgave Nr. 3. (2 Timer). En Bjælke har kvadratiske Endeflader, hvis Omkredse henholdsvis ere 36 og 24 Tommer; et Snit i 4 Alens Afstand fra den tykkeste Ende vil have en Omkreds af $33\frac{1}{3}$ Tomme. Hvor stor er Bjælkens Rumfang?

Den overskjæres parallelt med Endefladerne i 2 lige lange Stykker, og gjennem hvert af disse bores der paa langs et cylindrisk Hul. Naar dettes Radius er $1\frac{1}{2}$ Tomme større i det tykke end i det tynde Stykke, og de 2 Bjælker efter Gjennemboringen indeholde lige store Træmasser, hvor stor er da Radius i hvert Hul? ($\pi = \frac{22}{7}$).

Opl. 3.

$$\frac{x}{8\frac{1}{3} - 6} = \frac{x+4}{9-6};\ x = 14;\ x + 4 = 18 \text{ (Alen)} = 36 \text{ (Fod)}.$$

$$\frac{36}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) = 14\tfrac{1}{4} \text{ (Kbkfod). I.}$$

$$14\tfrac{1}{4} \text{ Kbkf.} = 24624 \text{ Kbktm.}$$

$$\frac{216}{3}\left((7\tfrac{1}{2})^2 + 9^2 + 7\tfrac{1}{2} \,.\, 9\right) - 216\,(x + 1\tfrac{1}{2})^2 \,.\, \frac{22}{7} = \frac{216}{3}\left(6^2 + (7\tfrac{1}{2})^2 + 6 \,.\, 7\tfrac{1}{2}\right)$$

$$- 216 \,.\, x^2 \,.\, \frac{22}{7}.\quad \text{Heraf } x = 1\tfrac{7}{11} \text{ Tomme; } x + 1\tfrac{1}{2} = 3\tfrac{3}{22} \text{ T.}\quad \text{(II).}$$

OPGAVE TIL LØSNING.

550. I en Plan er givet n Punkter. Igjennem 3 og 3 af disse lægges Cirkler. Det antages at hver to af disse skjære hinanden. Hvor mange Skjæringspunkter er der, som ikke falde sammen med de givne Punkter. (H. Valentiner).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von

Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

Femte Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1887.

FJERDE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Linnésgade 16, A, 3. Sal, Kjøbenhavn, K.

INTERPOLATION OG INTEGRATION VED RÆKKER.

(AF F. BUCHWALDT).

(Fortsættelse).

§ 2. Bestemmelsen af $\int_g^{g+h} Z\,dx$ ved Hjælp af det første Led i højre Side af den 2den (16) vil, ifølge Udtrykket (12) for $\overset{(n)}{v}$, naar de n Abscisser $t_1, t_2, \ldots t_n$ ere ganske vilkaarlig valgte, i Almindelighed medføre en Fejl af n'te Orden, hvis første Led er $\frac{h}{i}\int_{-(i-1)}^{1}(t+i-1)^{\alpha}\,.\,\varphi(n,t)\,.\,dt$; men, kan man disponere over alle n Abscisser, saa vil Fejlen kunne bringes ned til at være af Ordenen $2n$, og, kan man disponere frit over de s Abscisser $t_1, t_2, \ldots t_s$, medens Abscisserne $t_{s+1}, t_{s+2}, \ldots t_n$ ere givne, saa vil Fejlen kunne bringes ned til at være af Ordenen $(n+s)$. Det sidste Tilfælde, der for $s=n$ indeholder det foregaaende, i hvilket der kan frit disponeres over alle n Abscisser, fordrer, ifølge (12), at Abscisserne $t_1, t_2, \ldots t_s$, naar Feilen i den 2den (16) skal være af Ordenen $(n+s)$, bestemmes saaledes, at

$$\int_{-(i-1)}^{1}(t+i-1)^{\alpha}\,.\,\varphi(n,t)\,.\,t^{p}\,.\,dt=0 \text{ for } p=0,1,2,\ldots(s-1). \quad (17)$$

Da $t_{s+1}, t_{s+2}, \ldots t_n$ ere bekjendte, kjendes ogsaa Konstanterne $k_1, k_2, \ldots k_{n-s}$ i

$$(t-t_{s+1})(t-t_{s+2})\ldots(t-t_n)=t^{n-s}+k_1 t^{n-s-1}+\ldots+k_{n-s},$$

og man har da, idet

$$\varphi(n,t)=\varphi(s,t)\,.\,(t^{n-s}+k_1 t^{n-s-1}+\ldots+k_{n-s}),$$

ifølge (8), de s Betingelser

$$\left.\begin{array}{l}\int_{-(i-1)}^{1}(t+i-1)^{\alpha}\,.\,(t^{s}+\overset{(s)}{a}_1 t^{s-1}+\ldots+\overset{(s)}{a}_s)\,.\\ \qquad (t^{n-s}+k_1 t^{n-s-1}+\ldots+k_{n-s})\,.\,t^{p}\,.\,dt=0\\ \qquad \text{for } p=0,\,1,\,2,\ldots(s-1)\end{array}\right\}(17)'$$

til Bestemmelsen af de s Konstanter $\overset{(s)}{a}_1, \overset{(s)}{a}_2, \ldots \overset{(s)}{a}_s$ i $\varphi(s, t)$, hvornæst $t_1, t_2, \ldots t_s$ findes som Rødderne i $\varphi(s, t) = 0$.

Fejlen paa Bestemmelsen af

$$\int_g^{g+h} Z\,dx \text{ ved } \frac{h}{i}\int_{-(i-1)}^{1} (t+i-1)^a \cdot \overset{(n)}{y}\,dt \text{ bliver da:}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{h}{i}\int_{-(i-1)}^{1} (t+i-1)^a \overset{(n)}{v}\,dt - \\ &\frac{h}{i}\int_{-(i-1)}^{1} (t+i-1)^a \cdot \varphi(n,t) \cdot \{C_{n+s}t^s + C_{n+s+1}(t^{s+1} + \overset{(n)}{b}_1 t^s) + \ldots\}\,dt. \end{aligned}\right\} (18)$$

Da man i Almindelighed ikke kjender Koefficienterne C i Rækken (3) for Y, kan en egentlig numerisk Beregning, ifølge (18), af Integrationsfejlen ikke finde Sted. Naar derimod Forudsætningerne for Formlen (10)' ere tilstede, altsaa naar i numerisk Henseende Ulighederne

$$C_p > C_{p+1} > C_{p+2} > \cdots,$$

der ere en Følge af Konvergensen af Rækken (3), indtræde ved $p \leqq (n-1)$, saa at C_{n-1} er af $(n-1)$'te Orden, saa vil man af (18) kunne erholde en numerisk bestemt højere Grænse for den begaaede Fejl ved i Stedet for C_{n+s} at sætte $Y_1^{[n-1]}$ og lade de følgende Led af Rækken bortfalde.

I (17)' og (18) saa vel som i (1) vil det, som foran anført, være hensigtsmæssigt at sætte $i = 1$, naar a ikke er $= 0$, og $i = 2$, naar a er $= 0$.

---

§ 3. I 2 Tilfælde kunne de s Ligninger (17)', der tjene til Bestemmelsen af de s ikke givne Abscisser $t_1, t_2, \ldots t_s$, erstattes ved én enkelt Ligning af s'te Grad, hvori disse Størrelser findes som Rødder.

Det ene af disse Tilfælde er det, i hvilket s er $= n$, saa at der ingen Abscisser er givet. Det andet Tilfælde er det, i hvilket det er givet, at man for hver af Intervallets Grænser ($x = g$ og $x = g + h$) skal have

$$Y = \overset{(n)}{y},\ Y' = \overset{(n)}{y'},\ \ldots\ldots\ Y^{(l-1)} = \overset{(n)}{y^{(l-1)}},$$

saa at der i Alt er givet $2l$ Abscisser, nemlig l Abscisser $= -(i-1)$, eller rettere $= -(i-1)$, $-(i-1)+dt$, ... $-(i-1)+(l-1)\,dt$, og l Abscisser $= +1$, eller $= +1$, $+1-dt$, ... $+1-(l-1)\,dt$.

Det vil være naturligt først at behandle dette sidste Tilfælde, i hvilket der skal disponeres over $s = (n-2l)$ ikke givne Abscisser, da det er det almindeligere, idet det for $l = 0$ indbefatter det førstnævnte mere specielle, men desuagtet hyppigst forekommende Tilfælde, hvori der kan disponeres frit over alle n Abscisser.

De $(n-2l)$ Betingelser, som skulle tilfredsstilles af samtlige $n = (n-2l)+2l$ Abscisser, og som skulle tjene til Bestemmelsen af de ikke givne $(n-2l)$ Abscisser, ere ifølge (17)

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-(i-1)}^{1} t^p \,.\, \omega \,.\, dt = 0 \ \text{ for } p = 0, 1, 2, \ldots (n-2l-1), \\ &\text{idet} \qquad \omega = (t+i-1)^{\alpha} \,.\, \varphi(n, t). \end{aligned}\right\} \quad (17)''$$

Disse Betingelser tilfredsstilles alle ved

$$\left.\begin{aligned} &(t+i-1)^{\alpha} \,.\, \varphi(n,t) = \omega = \\ &\qquad K \,.\, \frac{d^{n-2l}\,(t+i-1)^{\alpha+n-l}\,(t-1)^{n-l}}{dt^{n-2l}}, \end{aligned}\right\} (19)$$

hvori K bestemmes saaledes, at Koefficienten til $t^{\alpha+n}$ bliver $= 1$. Man har nemlig

$$\int t^p \,.\, \omega \,.\, dt = \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \frac{[p]}{[p-r]}\, t^{p-r} \int^{(1+r)} \omega \,.\, dt^{1+r},$$

saa at, ifølge (19), den 1ste (17)'' vil være tilfredsstillet, naar

$$\int^{(1+r)} \omega \,.\, dt^{1+r} = K \frac{d^{n-2l-1-r}\,(t+i-1)^{\alpha+n-l}\,(t-1)^{n-l}}{dt^{n-2l-1-r}}$$

$$= K \sum_{q=0}^{q=n-2l-1-r} \frac{1}{[q]}\, \frac{[n-2l-1-r]}{[n-2l-1-r-q]}\, \frac{[n-l]}{[n-l-q]} \,.$$

$$\frac{\{\alpha+n-l\}}{\{\alpha+l+1+r+q\}}\,(t+i-1)^{\alpha+l+1+r+q}\,(t-1)^{n-l-q}$$

for $p = 0, 1, 2, \ldots (n - 2l - 1)$ er $= 0$ saavel ved $t = -(i-1)$ som ved $t = 1$; men i dette Udtryk for $\int^{(1+r)} \omega \,.\, dt^{1+r}$, i hvilket (jvfr. Side 66 i Tidsskr. f. Mathem., 1885)

$$\frac{\{\alpha + n - l\}}{\{\alpha + l + 1 + r + q\}} = \frac{(\alpha + n - l)(\alpha + n - l - 1)\ldots}{(\alpha + l + 1 + r + q)(\alpha + l + r + q)\ldots} = \frac{1}{(\alpha + l + 1 + r + q)\ldots(\alpha + n - l + 1)},$$

ville de mindste Potensexponenter for $(t + i - 1)$ og $(t - 1)$ være henholdsvis $(\alpha + 1 + l)$ og $(n - l) - (n - 2l - 1) = (1 + l)$, saa at alle Led i denne Række for $\int^{(1+r)} \omega \,.\, dt^{1+r}$ have den fælles Faktor

$$K \,.\, (t + i - 1)^{\alpha + 1 + l}(t - 1)^{1 + l}.$$

Naar altsaa blot α i (2) er $> -(1 + l)$, eller, naar ved $l = 0$, α er > -1, bliver $\int^{(1+r)} \omega \,.\, dt^{1+r} = 0$ saa vel for $t = -(i-1)$ som for $t = +1$, hvorved det er bevist, at (19) tilfredsstiller alle Betingelserne i (17)''.

Da (19) giver

$$(t + i - 1)^{\alpha} \,.\, \varphi(n, t) = K \,.\, (t + i - 1)^{\alpha + l}(t - 1)^{l} \,.\, \sum_{q=0}^{q=n-2l} \frac{1}{[q]} \frac{[n - 2l]}{[n - 2l - q]} \frac{[n - l]}{[n - l - q]} \frac{\{\alpha + n - l\}}{\{\alpha + l + q\}} \,.\, (t + i - 1)^{q} \,.\, (t - 1)^{n - 2l - q},$$

faar man altsaa, efter Bortdivision af den for alle Led fælles Faktor $(t + i - 1)^{\alpha + l} \,.\, (t - 1)^{l}$, at de $(n - 2l)$ søgte Abscisseværdier kunne findes som Rødderne i den $(n - 2l)$'te Grads Ligning

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varphi(n, t)}{(t + i - 1)^{l} \,.\, (t - 1)^{l}} = \\ &\frac{K}{(t + i - 1)^{\alpha + l} \,.\, (t - 1)^{l}} \cdot \frac{d^{n-2l}(t + i - 1)^{\alpha + n - l}(t - 1)^{n - l}}{dt^{n-2l}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Ved disse Abscisseværdier, i Forbindelse med de l givne Abscisser $-(i - 1)$ og de l givne Abscisser $+ 1$, faar man da,

ifølge (18), at Fejlen paa Bestemmelsen af $\int_g^{g+h} Z\,dx$ ved

$\frac{h}{i}\int_{-(i-1)}^{1}(t+i-1)^{\alpha}\,.\overset{(n)}{y}\,.\,dt$ bliver

$$\frac{h}{i}\int_{-(i-1)}^{1}(t+i-1)^{\alpha}.\overset{(n)}{v}.\,dt = \frac{h}{i}\int_{-(i-1)}^{1}(t+i-1)^{\alpha}.\varphi(n,t)\Big\{C_{2(n-l)}\,t^{n-2l}+\ldots\Big\}dt, \quad (21)$$

altsaa af Ordenen $2(n-l)$, hvorved maa erindres, at l er $\leqq \frac{n}{2}$, eller at $2(n-l) = n + (n-2l) = n + s \geqq n$.

Er $l = 0$, saa at der kan disponeres over alle n Abscisseværdier $t_1, t_2, \ldots t_n$, saa blive altsaa alle disse at bestemme som Rødderne i (20), der for $l = 0$ bliver en Ligning af n'te Grad, naar man vil have, at Fejlen paa Bestemmelsen af $\int_g^{g+h} Z\,dx$ ved $\frac{h}{i}\int_{-(i-1)}^{1}(t+i-1)^{\alpha}\,.\overset{(n)}{y}\,.\,dt$ skal, ifølge (21), hvori l sættes $= 0$, kunne bringes ned til at være en Størrelse af Ordenen $2n$.

Der vil vistnok hyppigst blive Anvendelse for Tilfældet $l = 0$; men Tilfældet $l = 1$, hvorved der altsaa stilles den Fordring, at man skal have $\overset{(n)}{y} = Y$, eller $(t+i-1)^{\alpha}\overset{(n)}{y} = Z$ ved Intervallets Grænser $x = g$ og $x = g + h$, vil dog ogsaa let kunne forekomme og kan i hvert Fald skaffes tilveje derved, at det oprindelige Interval deles i mindre Intervaller, begrænsede af de givne Værdier af x.

---

§ 4. Naar α ikke er $= 0$, saa at der til $x = g$ svarer et særegent Punkt ($f^{(r)}(g) = \infty$), sættes i de foregaaende Formler $i = 1$.

Derved bliver i (19) og (20)

$$\frac{d^{n-2l}\,t^{\alpha+n-l}(t-1)^{n-l}}{dt^{n-2l}} =$$

$$\ldots\ldots \frac{d^{n-2l}}{dt^{n-2l}}\sum_{r=0}^{r=n-l}\frac{(-1)^r}{[r]}\,\frac{[n-l]}{[n-l-r]}\,t^{\alpha+2(n-l)-r}, \ldots$$

saa at man, ved i (19) og (20) at sætte $K = \frac{\{\alpha + n\}}{\{\alpha + 2n - 2l\}}$, faar, at i disse Formler er

$$\varphi(n,t) = t^n + \sum_{r=1}^{r=n-l} \frac{(-1)^r}{[r]} \frac{[n-l]}{[n-l-r]} \frac{\{\alpha+n\}}{\{\alpha+n-r\}} \frac{\{\alpha+2n-2l-r\}}{\{\alpha+2n-2l\}} t^{n-r}.$$

De $(n - 2l)$ ikke givne Abscisser findes altsaa, ifølge (20), som Rødder i Ligningen

$$\left.\begin{aligned}\varphi(n,t) = t^n + \sum_{r=1}^{r=n-l} (-1)^r \frac{(n-l-r+1)(n-l-r+2)\ldots(n-l)}{1\,.\,2\ldots r}\,.\\ \frac{(\alpha+n-r+1)(\alpha+n-r+2)\ldots(\alpha+n)}{(\alpha+2n-2l-r+1)(\alpha+2n-2l-r+2)\ldots(\alpha+2n-2l)} t^{n-r} = 0,\end{aligned}\right\}(22)$$

efter at i denne Ligning, der indeholder samtlige n Abscisser som Rødder, Faktoren $t^l(t-1)^l$, som hidrører fra de $2l$ givne Abscisser, er bortdivideret.

Af (22) faas, for

$$l=0,\ n=1,\ \varphi(1,t) = t - \frac{\alpha+1}{\alpha+2} = 0,$$

$$l=0,\ n=2,\ \varphi(2,t) = t^2 - 2\frac{\alpha+2}{\alpha+4}t + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+3)(\alpha+4)} =$$

$$\left(t - \frac{\alpha+2}{\alpha+4} + \frac{\sqrt{\frac{2(\alpha+2)}{\alpha+3}}}{\alpha+4}\right)\left(t - \frac{\alpha+2}{\alpha+4} - \frac{\sqrt{\frac{2(\alpha+2)}{\alpha+3}}}{\alpha+4}\right) = 0,$$

. . . .

$$l=1,\ n=2,\ \varphi(2,t) = t^2 - t = t(t-1) = 0,$$

$$l=1,\ n=3,\ \varphi(3,t) = t^3 - 2\frac{\alpha+3}{\alpha+4}t^2 + \frac{\alpha+2}{\alpha+4}t = t(t-1)\left(t - \frac{\alpha+2}{\alpha+4}\right) = 0,$$

$$l=1,\ n=4,\ \varphi(4,t) = t^4 - 3\frac{\alpha+4}{\alpha+6}t^3 + \frac{(\alpha+3)(\alpha+4)}{(\alpha+5)(\alpha+6)}t^2 - \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{(\alpha+5)(\alpha+6)}t$$

$$= t(t-1)\left(t - \frac{\alpha+3}{\alpha+6} + \frac{\sqrt{\frac{3(\alpha+3)}{\alpha+5}}}{\alpha+6}\right)\left(t - \frac{\alpha+3}{\alpha+6} - \frac{\sqrt{\frac{3(\alpha+3)}{\alpha+5}}}{\alpha+6}\right) = 0.$$

. . . .

Som **Exempel** paa Anvendelsen af denne sidste Formel ($\varphi(4, t)$ for $n = 4$ og $l = 1$) saa vel som paa Anvendelsen overhovedet af, hvad der hidtil er fremstillet, ville vi antage, at der for Funktionen

$$F(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

skal i Intervallet $(-1 \leqq x \leqq +1)$ fremstilles en endelig Interpolationsrække, som giver de nøjagtige Værdier $F(-1) = 0$, $F(0) = 1$ og $F(+1) = 0$, og som i Almindelighed for hvilke som helst Værdier af x har en Fejl af højst 4de Orden, der ved Integration mellem Grænserne -1 og $+1$ skal give den mindst mulige Fejl paa Bestemmelsen af $\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$. Da $F'(-1)$ og $F'(+1)$ ere uendelige, maa Intervallet deles i 2 Intervaller, der henholdsvis have $g = -1$ og $g = +1$. Vi dele da Intervallet i 2 lige store Dele med Grænserne $g = -1$, $g + h = 0$ og $g = +1$, $g + h = 0$, saa at $\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 - x^2}\,dx - \int_{+1}^{0} \sqrt{1 - x^2}\,dx.$ Det vil her være tilstrækkeligt at fremstille en Interpolationsrække alene for det første af Intervallerne, da Intervallerne ere lige store, og Funktionen er symmetrisk med Hensyn til Ordinaten gjennem Intervallernes Fællespunkt ($x = 0$).

Da der til $x = g = -1$, svarer et særegent Punkt, sættes $i = 1$. Substitutionen bliver da, idet $h = +1$, $x = -1 + t$, som giver $Z = \sqrt{1 - x^2} = t^{\frac{1}{2}} . \sqrt{2 - t} = t^{\frac{1}{2}} . Y$, der, sammenholdt med (2), viser at α er $= \frac{1}{2}$, og at der for Y antages at existere en Række af Formen (3). For Y skal der dernæst fremstilles en Interpolationsrække af Formen (9), hvori n er $= 4$, og som for Grænseværdierne $x_1 = -1$ og $x_2 = 0$, eller $t_1 = 0$ og $t_2 = +1$, giver $\overset{(4)}{y_1} = Y_1 = \sqrt{2}$ og $\overset{(4)}{y_2} = Y_2 = +1$. Der er saaledes givet 2 Abscisseværdier (1 for hver af Intervallets Grænser, altsaa $l = 1$), hvornæst de resterende $(n - 2l) = (4 - 2) = 2$ Abscisseværdier t_3 og t_4 skulle bestemmes saaledes, at Korrektionen $\int_0^1 t^{\frac{1}{2}} \overset{(4)}{v}\,dt$ i (16)

paa $\int_0^1 t^{\frac{1}{2}} \overset{(4)}{y}\, dt$ som Bestemmelse for $\int_{-1}^0 Z\, dx$ bliver saa lille som muligt, eller, ifølge (21), af Ordenen $2(n-l) = 2(4-1) = 6$. Man skal altsaa i den ovenfor anførte Ligning $\varphi(4, t) = 0$, gjældende for $n = 4$ og $l = 1$, sætte $\alpha = \frac{1}{2}$, hvorved man faar

$$t_3 = \frac{7}{13} - \frac{2}{13}\sqrt{\frac{3.7}{11}} = 0{,}3258925, \text{ som giver } Y_3 = 1{,}2938732, \text{ og}$$

$$t_4 = \frac{7}{13} + \frac{2}{13}\sqrt{\frac{3.7}{11}} = 0{,}7510305, \text{ som giver } Y_4 = 1{,}1175730.$$

De i Rækken (9) for $\overset{(4)}{y}$ indgaaende Interpolationskoefficienter $Y_1^{[1]}$, $Y_1^{[2]}$ og $Y_1^{[3]}$ beregnes derpaa i tabellarisk Form paa den i § 1, S. 83 angivne Maade, og Beregningens Rigtighed kontrolleres ved i Tavlen efter Værdiparrene t_1 og Y_1, t_2 og Y_2, t_3 og Y_3 at tilføje som et fjerde Værdipar $t_4 = t_1$ og $Y_4 = Y_1$. Derved erholdes Interpolationskoefficienterne:

$$Y_1 = +\,1{,}4142137,\quad Y_1^{[1]} = -\,0{,}4142137,\quad Y_1^{[2]} = -\,0{,}0666797,$$
$$Y_1^{[3]} = -\,0{,}0248877,$$

medens Kontrolberegningen giver $Y_2^{[3]} = -\,0{,}0248876$.

Med disse Værdier bliver Interpolationsformlen

$$\overset{(4)}{y} = Y_1 + \varphi(1, t) \,.\, Y_1^{[1]} + \varphi(2, t) \,.\, Y_1^{[2]} + \varphi(3, t) \,.\, Y_1^{[3]}, \text{ eller}$$

$$\overset{(4)}{y} = Y_1 + t \,.\, Y_1^{[1]} + t(t-1) \,.\, Y_1^{[2]} + t(t-1)(t - 0{,}3258925) \,.\, Y_1^{[3]},$$

hvortil Fejlen $\overset{(4)}{v}$ erholdes af (12) i Forbindelse med Udtrykket for $\varphi(4, t)$ ved $l = 1$.

Medens $\varphi(r, t)$, saa længe Formlen (9) skal bruges til Interpolation, bør forblive under Formen $(t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_r)$, saa maa man, naar Formlen skal bruges til Integration, bringe $\varphi(r, t)$ paa Formen $t^r + \overset{(r)}{a}_1 t^{r-1} + \ldots + \overset{(r)}{a}_r$. Udføres dette, saa faar man ifølge (16),

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1 - x^2}\, dx - \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} \overset{(4)}{v}\, dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} \overset{(4)}{y}\, dt = \frac{2}{3} Y_1 + \frac{2}{5} Y_1^{[1]} +$$
$$\left(\frac{2}{7} - \frac{2}{5}\right) Y_1^{[2]} + \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{7} \,.\, 1{,}3258925 + \frac{2}{5} \,.\, 0{,}3258925\right) Y_1^{[3]}$$
$$= +\,0{,}7853974 = \frac{\pi}{4} - 0{,}0000008.$$

Den sande Værdi af $\int_0^1 t^{\frac{3}{2}} \overset{(4)}{v}\, dt$ er altsaa i dette Tilfælde $+ 0{,}0000008$; men i Almindelighed, hvor man ikke kjender Koefficienterne C i Rækkeudviklingen (3) for Y og endnu mindre naturligvis den søgte Værdi af $\int_g^{g+h} Z\, dx$, kan Integrationsfejlens numeriske Værdi kun angives ved en højere Grænse, idet man (jvfr. Slutningen af § 2) i (21) sætter $Y_1^{[n-1]} t^{n-2l}$ i Stedet for $C_{2(n-l)} t^{n-2l} + \ldots$, altsaa her $Y_1^{[8]} t^2$ i Stedet for $C_6 t^2 + \ldots$ Man faar derved, idet den oven anførte Formel for $\varphi(4, t)$, gjældende for $n = 4$ og $l = 1$, giver ved $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\varphi(4, t) = t^4 - 3\,\frac{9}{13}\,t^3 + 3\,\frac{7\,.\,9}{11\,.\,13}\,t^2 - \frac{5\,.\,7}{11\,.\,13}\,t,$$

at i numerisk Henseende Integrationsfejlen bliver, ifølge (21),

$$\int_0^1 t^{\frac{3}{2}} \overset{(4)}{v}\, dt < Y_1^{[8]} \int_0^1 \varphi(4, t)\,.\,t^{\frac{5}{2}}\, dt =$$

$$Y_1^{[8]} \left(\frac{2}{15} - \frac{2}{13}\,.\,3\,\frac{9}{13} + \frac{2}{11}\,.\,3\,.\,\frac{7\,.\,9}{11\,.\,13} - \frac{2}{9}\,.\,\frac{5\,.\,7}{11\,.\,13} \right)$$

$$= - Y_1^{[8]}\,.\,0{,}0002783 = 0{,}0000069,$$

hvilken Grænseværdi altsaa er 8 à 9 Gange større end Fejlens sande Værdi, som kunde synes paafaldende lille; men det fortjener herved vel at bemærkes, at naar der disponeres saaledes over de $(n - 2l)$ ikke givne Absoisser, at den ved (21) bestemte Integrationsfejl bliver af Ordenen $2(n - l)$, medens Fejlen $\overset{(n)}{v}$ er af Ordenen n, saa er der i Virkeligheden altid opnaaet en meget større Nøjagtighed end den, der for Fejlen $\overset{(n)}{v}$ paa $\overset{(n)}{y}$ angives ved Størrelsen af C_n og for Fejlen paa Integralet ved Størrelsen af $C_{2(n-l)}$, fordi i saa Fald saa vel $\varphi(n, t)$ som Integralerne $\int_{-(i-1)}^{1} (t + i - 1)^{\alpha}\, t^{n-2l+p}\, \varphi(n, t)\, dt$, for $p = 0, 1, 2, \ldots$, ville være meget smaa Størrelser, desto mindre, jo større n og $(n - 2l)$ ere. Dette gjælder, hvad enten α er $\gtrless 0$,

eller α er $= 0$. Naar l er $= 0$, og tillige α er $= 0$, hvorved i tages $= 2$, falder Bestemmelsen ifølge (20) af de n Abscisser endogsaa fuldstændig sammen med at bestemme disse Abscisser saaledes, at $\int_{-1}^{+1} \varphi^2 (n, t)\, dt$ bliver et Minimum, saa at gjennemgaaende i hele Intervallet $\varphi (n, t)$ tilnærmelsesvis erholder sin i numerisk Henseende mindst mulige Værdi. Beviset herfor vil blive givet i den følgende §.

---

§ 5. **Naar** α **er** $= 0$, saa at der ikke findes noget særegent Punkt i Intervallet fra $x = g$ til $x = g + h$, **sættes i de foregaaende Formler** $i = 2$.

Derved bliver i (19) og (20)

$$\frac{d^{n-2l}(t^2-1)^{n-l}}{dt^{n-2l}} = \frac{d^{n-2l}}{dt^{n-2l}} \sum_{r=0}^{r=n-l} \frac{(-1)^r}{[r]} \frac{[n-l]}{[n-l-r]} t^{2(n-l-r)},$$

Da Koefficienten til t^n i $\varphi (n, t)$ skal være $= 1$, maa man altsaa i (19) og (20) sætte $K = \frac{[n]}{[2(n-l)]}$, hvorved man, **hvad enten** n er $= 2m$, **eller** $n = 2m + 1$, faar

$$\varphi (n, t) = t^n + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{(-1)^r}{[r]} \frac{[n]}{[n-2r]} \frac{[n-l]}{[n-l-r]} \frac{[2(n-l-r)]}{[2(n-l)]} t^{n-2r}.$$

Denne Formel kan gives en for Beregningen hensigtsmæssigere Form, saa at, ifølge (20),

$$\left.\begin{aligned} \varphi (n, t) = t^n + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{(-1)^r}{2.4.6\ldots 2r} . \\ \frac{n(n-1)\ldots(n-2r+1)}{(2n-2l-1)(2n-2l-3)\ldots(2n-2l-2r+1)} t^{n-2r} = 0, \end{aligned}\right\} (23)$$

bliver den Ligning, der indeholder alle n Abscisser som Rødder, og hvoraf man altsaa efter Bortdivision af Faktoren $(t^2 - 1)^l$, hidrørende fra de $2l$ givne Abscisser, vil kunne finde som Rødder de $(n - 2l)$ Abscisser, der ikke ere enten $= -1$ eller $= +1$.

Samtlige Led i Ligningen (23) ville være af lige eller ulige Grad med Hensyn til t, eftersom n er $= 2m$, eller $n = 2m + 1$, eller Ligningen vil, med de i (8) brugte Betegnelser, have Formen $\varphi (n, t) = t^n + \overset{(n)}{a_2} t^{n-2} + \overset{(n)}{a_4} t^{n-4} + \ldots = 0$. Alle Koefficien-

terne $\overset{(n)}{a}_1, \overset{(n)}{a}_3, \overset{(n)}{a}_5, \ldots$ ere altsaa $= 0$, hvilket, ifølge (13), medfører, at af de i (12) indgaaende Størrelser $\overset{(n)}{b}$ ligeledes de med ulige Indices, nemlig $\overset{(n)}{b}_1, \overset{(n)}{b}_3, \overset{(n)}{b}_5, \ldots$, ville blive $= 0$.

Ikke blot, naar $\varphi(n, t)$ har Formen (23), men overhovedet, naar man har

$$\varphi(n, t) = t^n + \overset{(n)}{a}_2 t^{n-2} + \overset{(n)}{a}_4 t^{n-4} + \ldots = 0,$$

og man betegner de Rødder, der ere > 0, ved

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \ldots \geqq u_m,$$

vil den for Beregningen af Interpolationskoefficienterne i (9) hensigtsmæssigste Ordning af Abscisserne i Reglen

for $n = 2m$ være $t_1 = +u_1,\ t_2 = -u_1,\ t_3 = +u_2,\ t_4 = -u_2, \ldots$
$t_{2m-1} = +u_m;\ t_{2m} = -u_m$ og

for $n = 2m + 1$ være $t_1 = 0,\ t_2 = +u_1,\ t_3 = -u_1,\ t_4 = +u_2, \ldots$
$t_{2m-1} = -u_{m-1},\ t_{2m} = +u_m,\ t_{2m+1} = -u_m,$

$$\left.\begin{array}{l}\text{eller for } n = 2m \ldots t_{2p-1} = -t_{2p} = +u_p \\ \text{og for } n = 2m+1 \ldots t_1 = 0 \text{ og } t_{2p} = -t_{2p+1} = +u_p,\end{array}\right\} \quad (24)$$

idet $p = 1, 2, \ldots m$.

Formlen (23) vil, naar l er $= 1$ og

$n = 2$, give $\varphi(2, t) = t^2 - 1 = 0,$

$n = 3$, — $\varphi(3, t) = t^3 - t = t(t^2 - 1) = 0,$

$n = 4$, — $\varphi(4, t) = t^4 - \frac{6}{5}t^2 + \frac{1}{5} = (t^2 - 1)\left(t^2 - \frac{1}{5}\right) = 0,$

$n = 5$, — $\varphi(5, t) = t^5 - \frac{10}{7}t^3 + \frac{3}{7}t = t(t^2 - 1)\left(t^2 - \frac{3}{7}\right) = 0,$

$n = 6$, — $\varphi(6, t) = t^6 - \frac{5}{3}t^4 + \frac{5}{7}t^2 - \frac{1}{21} =$

$$(t^2 - 1)\left(t^2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{7}}\right)\left(t^2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{7}}\right) = 0,$$

$n = 7$, give $\varphi(7, t) = t^7 - \frac{21}{11}t^5 + \frac{35}{33}t^3 - \frac{5}{33}t =$

$$t(t^2 - 1)\left(t^2 - \frac{5}{11} - \frac{2}{11}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(t^2 - \frac{5}{11} + \frac{2}{11}\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 0.$$

. . . .

For $l = 0$ i (23) har jeg Side 49 i min Afhandling: »Om den nøjagtigste endelige Rækkeudvikling o. s. v.« i »Tidsskrift for Mathematik, 1884« givet en Tavle over $\varphi(n, t)$ og Værdierne af Rødderne i $\varphi(n, t) = 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots 9$ og skal derfor indskrænke mig til at henvise dertil. I den samme Tavle findes i en Kolonne, betegnet foroven ved v^*_{+1}, angiven Værdien ved $t = \underline{+} 1$ af det første Led i Rækken (12) for Fejlen $\overset{(n)}{v}$, altsaa Værdien af $\varphi(n, \underline{+} 1) . C_n$, der vil være Maximumsværdien af $\varphi(n, t) . C_n$ i Intervallet $(-1 \leqq t \leqq +1)$.

Med disse saaledes for $l = 0$ af (23) bestemte n Abscisser $t_1, t_2, \ldots t_n$ vil $\overset{(n)}{y}$ tillige være Ordinaten i den Kurve af $(n-1)$'te Grad, som af alle nærmer sig mest til i Intervallet $(-1 \leqq t \leqq +1)$ at falde sammen med den Kurve, hvis Ordinat er Y, idet den vil give den mindste Middelfejl. Strengt gjælder dette dog kun, naar i Udtrykket (12) for $\overset{(n)}{v}$ Leddene aftage saa stærkt, at man i Stedet for $C_n + C_{n+1} t + C_{n+2}(t^2 + \overset{(n)}{b}_2) + \ldots$ kan sætte C_n eller en anden Konstant K_n, hvis Værdi svarer til en numerisk Middelværdi af Rækken, saa at $\overset{(n)}{v}$ kan sættes $= K_n . \varphi(n, t)$. Da nemlig Summen af Fejlenes Kvadrater er $= \frac{1}{dt}\int_{-1}^{+1}\left(\overset{(n)}{v}\right)^2 dt$, og Antallet af Fejl er $= \frac{2}{dt}$, bliver Middelfejlens Kvadrat $=$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left(\overset{(n)}{v}\right)^2 dt - \frac{1}{2} K_n^2 \int_{-1}^{+1} \varphi^2(n, t) . dt,$$

der, idet $\varphi(n, t)$ er $= (t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_n) = t^n + \overset{(n)}{a}_1 t^{n-1} + \ldots \overset{(n)}{a}_{n-p} t^p + \ldots + \overset{(n)}{a}_n$, vil blive et Minimum, naar Differentialkoefficienterne deraf med Hensyn til $\overset{(n)}{a}_1, \ldots \overset{(n)}{a}_{n-p}, \ldots \overset{(n)}{a}_n$ ere $= 0$, altsaa naar $t_1, t_2, \ldots t_n$ tilfredsstille de n Betingelser

$$\int_{-1}^{+1} t^p . \varphi(n, t)\, dt = 0 \text{ for } p = 0, 1, 2, \ldots (n-1);$$

men disse ere de samme Betingelser som dem, der for $\alpha = 0$ og $l = 0$ haves i (17)'', og som have tjent til at bestemme $t_1, t_2, \ldots t_n$ saaledes, at Fejlen paa $\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{y}\, dt$ bliver saa lille som muligt, nemlig af Ordenen $2n$, idet man ifølge (4) og (18) faar

$$\int_g^{g+h} Y\, dx = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} Y\, dt =$$

$$\frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{y}\, dt + \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(n, t) . \left\{ C_{2n}\, t^n + C_{2n+1}\, t^{n+1} + \ldots \right\} dt.$$

Det er disse 2 sammenhørende Egenskaber ved den saaledes bestemte Interpolationskurve med Ordinaten $\overset{(n)}{y}$, som jeg i min ovennævnte Afhandling paa en anden Maade har paavist, og som bleve berørte i Slutningen af den foregaaende §.

Ved $\alpha = 0$ er i Almindelighed, ifølge (4) og (5),

$$\int_g^{g+h} Y\, dx = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{y}\, dt + \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt,$$

hvori Værdierne af $\overset{(n)}{y}$ og $\overset{(n)}{v}$ ifølge (9) og (12) indsættes, og, har $\varphi(n, t)$ den ved højre Side af (23) angivne Form, vil man, ifølge (21), for $\frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{y}\, dt$ faa Korrektionen

$$\frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(n, t) . \left\{ C_{2(n-l)}\, t^{n-2l} + C_{2(n-l)+1}\, t^{n-2l+1} + \ldots \right\} dt.$$

Ved Beregningen af $\frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{y}\, dt$ kan det, naar man ikke tillige skal have en bekvem Interpolationsrække for Y, som i § 1 bemærket, være fordelagtigt at benytte Lagranges Formel (6)

i Stedet for Rækken (9). Dette vil finde Sted, naar man forud en Gang for alle har for ganske bestemte Værdier af $t_1, t_2, \ldots t_n$ fundet Værdierne af Integralerne mellem Grænserne $t = -1$ og $t = +1$ af de n i (6) forekommende Koefficienter $\frac{\varphi_r(n, t)}{\varphi_r(n, t_r)}$. Denne Beregning er udført dels ved de Værdier af $t_1, t_2, \ldots t_n$, som fremstaa ved en Deling af Intervallet $(-1 \leqq t \leqq +1)$ i $(n-1)$ lige store Dele (ɔ: de Cotes'iske Formler), dels ved dem, der gjøre alle de n Integraler indbyrdes lige store, $= \frac{1}{n}$, saa at man faar $\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{y}\, dt = \frac{1}{n}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$, dels endelig ved de Abscisseværdier, der ere Rødder i (23) for $l = 0$ (ɔ: de Gaussiske Formler). De n Integralers Værdier ere i alle disse Tilfælde fundne ikke direkte ved Integrationen, men ved Opløsningen af et System af Ligninger, hvoraf tillige i de 2 sidstnævnte Tilfælde Abscisseværdierne $t_1, t_2, \ldots t_n$ kunde bestemmes. Angaaende den herved fulgte Fremgangsmaade kan der henvises til Gehejmeraad Andræ's Afhandling i »Oversigt over det Kgl. danske Vidensk. Selsk. Forhandlinger i 1867«, til Prof. Oppermann's Afhandling i »Tidsskr. f. Mathem., 1871« og til min fornævnte Afhandling i samme Tidsskrift; men iøvrigt vil det omtalte System af Ligninger blive fremstillet i det følgende med det hidtil udviklede som Udgangspunkt.

Der kunde være Anledning til at foretage en Beregning af de ved Integrationen af Lagranges Formel (6) fremkommende Integraler $\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_r(n, t)}{\varphi_r(n, t_r)}\, dt$ ogsaa for andre givne Værdier af Abscisserne $t_1, t_2, \ldots t_n$ end de fornævnte og da især for dem, der ere Rødder i (23) for $l = 1$. Vi skulle dog indskrænke os til at angive den Form, som baade den direkte og den indirekte (ɔ: ved Ligninger) Beregning maa antage saa vel i Almindelighed som specielt i alle de Tilfælde, hvor Formlerne (24) kunne komme til Anvendelse,

eller hvor Ordinaterne $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ af den givne Kurve Y ere grupperede symmetrisk med Hensyn til Ordinataxen, og til at gjøre en Anvendelse heraf paa et specielt, saa vidt vides, endnu ikke behandlet Tilfælde. Det vil da først med Hensyn til Anvendelsen af Betegnelserne i (24) for de n Abscisseværdier, være hensigtsmæssigt til Brug ved denne Undersøgelse i Stedet for den almindelige Betegnelse Y at anvende Betegnelsen $Y(t)$, saa at man, ifølge (24),

$$\left.\begin{array}{l} \text{for } n = 2m \text{ faar} \\ Y_{2p-1} = Y(t_{2p-1}) = Y(+u_p) \text{ og } Y_{2p} = Y(-u_p) \text{ og} \\ \text{for } n = 2m+1 \text{ faar} \\ Y_1 = Y(0),\ Y_{2p} = Y(+u_p) \text{ og } Y_{2p+1} = Y(-u_p). \end{array}\right\} \quad (25)$$

Fremdeles ville vi, i Analogi med Betegnelserne $\varphi(n,t)$ og $\varphi_r(n,t)$ i (6) og med det almindelige Udtryk for $\varphi(r,t)$ i (8), indføre Betegnelserne

$$\left.\begin{array}{l} \psi(m,t^2) = (t^2 - u_1^2)(t^2 - u_2^2)\ldots(t^2 - u_m^2), \\ \psi_p(m,t^2) = \dfrac{\psi(m,t^2)}{t^2 - u_p^2}. \end{array}\right\} \quad (26)$$

saa at man har

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(2m,t) = \psi(m,t^2) = t^{2m} + \overset{(2m)}{a_2}\, t^{2m-2} + \ldots + \overset{(2m)}{a_{2m}}, \\ \varphi(2m+1,t) = t.\psi(m,t^2) = t^{2m+1} + \overset{(2m+1)}{a_2}\, t^{2m-1} + \ldots + \overset{(2m+1)}{a_{2m}}\, t, \end{array}\right\} (26')$$

$$\varphi_{2p-1}(2m,t) = \frac{\psi(m,t^2)}{t - t_{2p-1}} = \frac{\psi(m,t^2)}{t - u_p}, \text{ eller}$$

$$\varphi_{2p-1}(2m,t) = \psi_p(m,t^2).(t+u_p),$$

$$\varphi_{2p}(2m,t) = \psi_p(m,t^2).(t-u_p),$$

$$\varphi_1(2m+1,t) = \psi(m,t^2),$$

$$\varphi_{2p}(2m+1,t) = \psi_p(m,t^2).t(t+u_p),$$

$$\varphi_{2p+1}(2m+1,t) = \psi_p(m,t^2).t(t-u_p).$$

Heraf findes da

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_{2p-1}(2m,t)}{\varphi_{2p-1}(2m,+u_p)}\,dt = \int_{-1}^{+1} \frac{\psi_p(m,t^2).(t+u_p)}{\psi_p(m,u_p^2).2u_p}\,dt =$$

$$\frac{1}{\psi_p(m,u_p^2)} \int_0^{+1} \psi_p(m,t^2)\,dt = 2\,\overset{(2m)}{\omega_p}.$$

og den samme Værdi erholdes for $\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_{2p}(2m, t)}{\varphi_{2p}(2m, -u_p)} dt$. Beregnes de øvrige Integraler paa samme Maade, erholder man af (6) for $n = 2m$ og for $n = 2m + 1$:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_g^{g+h} Y dx - \frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(2m)}{v}\, dt = h \sum_{p=1}^{p=m} \overset{(2m)}{\omega_p}\, (Y(+u_p) + Y(-u_p)),\\
&\qquad \text{idet } \overset{(2m)}{\omega_p} = \frac{1}{2}\int_0^{+1} \frac{\psi_p(m, t^2)}{\psi_p(m, u_p^2)}\, dt, \text{ og}\\
&\int_g^{g+h} Y dx - \frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(2m+1)}{v}\, dt =\\
&\qquad h \, . \overset{(2m+1)}{\omega_0} . Y(0) + h \sum_{p=1}^{p=m} \overset{(2m+1)}{\omega_p}\, (Y(+u_p) + Y(-u_p)),\\
&\text{idet } \overset{(2m+1)}{\omega_p} = \frac{1}{2}\int_0^{+1} \frac{\psi_p(m, t^2) . t^2}{\psi_p(m, u_p^2) . u_p^2}\, dt \text{ og } \overset{(2m+1)}{\omega_0} = \int_0^{1} \frac{\psi(m, t^2)}{\psi(m, 0)}\, dt.
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Korrektionen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt$ i (27) vil, som Følge af den i (24) indeholdte symmetriske Ordning med Hensyn til Begyndelsespunktet af de n Abscisser $t_1, t_2, \ldots t_n$, altid blive af lige Orden, og, er der disponeret saaledes over $(m - q)$ af de m Størrelser u i (21) — altsaa, naar n er $= 2m$, saaledes over $s = 2(m - q) = n - 2q$, og, naar n er $= 2m + 1$, idet da t_1 er $= 0$, saaledes over $s = 1 + 2(m - q) = n - 2q$ af de n Abscisser t —, at Betingelserne (17) ere tilfredsstillede, bliver Korrektionen i (27), ifølge (18), ved q forud givne Værdier af de m Størrelser u:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(2m)}{v}\, dt = h \, . C_{2(2m-q)} \int_0^{1} \psi(m, t^2) . t^{2(m-q)} . dt + \ldots\\
&\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(2m+1)}{v}\, dt = h\, C_{2(2m+1-q)} \int_0^{1} \psi(m, t^2) . t^{2(m+1-q)} . dt + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

I den første (28) er altsaa, ifølge (23)', $\psi(m, t^2) = \varphi(2m, t)$, og i den anden (28) $\psi(m, t^2) = \frac{\varphi(2m+1, t)}{t}$.

Bestemmelsen af Koefficienterne $\overset{(n)}{\omega}$ i (27) saa vel som af de ikke forud givne Abscisseværdier, der skulle bringe Korrektionen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt$ i (27) til at være af den højst mulige Orden, vilde — som foran bemærket — ogsaa kunne henføres til Opløsningen af et System af Ligninger. Disse ville vi dog først fremstille for det almindelige Tilfælde, at de n Abscisseværdier $t_1, t_2, \ldots t_n$ kunne være aldeles vilkaarlige, saa at altsaa Relationerne (24) ikke paa Forhaand ere givne. Ligningerne kunne udledes af Lagranges Formel (6), som giver

$$\left.\begin{aligned} &\int_g^{g+h} Y\,dx - \frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt = h \sum_{r=1}^{r=n} \overset{(n)}{\Omega}_r Y_r, \\ &\text{idet } \overset{(n)}{\Omega}_r = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_r(n, t)}{\varphi_r(n, t_r)}\, dt. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Naar nemlig $t_1, t_2, \ldots t_n$ skulle have saadanne Værdier, at Korrektionen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt$ i (29) bliver af Ordenen $(n+s)$, altsaa ifølge (18) og (12):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt = C_{n+s}\cdot\overset{(n)}{Q}_0 + C_{n+s+1}\cdot\overset{(n)}{Q}_1 + \ldots + C_{n+s+p}\cdot\overset{(n)}{Q}_p + \ldots \\ &\text{idet } \overset{(n)}{Q}_p = \frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi(n, t)\,(t^{s+p} + \overset{(n)}{b}_1\, t^{s+p-1} + \ldots + \overset{(n)}{b}_{s+p})\, dt. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

saa vilde man, idet jo Koefficienterne C i Rækken (3) for Y kunne være hvilke som helst, efter i (29) at have indsat Rækken (3) for

Y og Y_r og Rækken (30) for $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1}\overset{(n)}{v}\,dt$, kunne sætte Faktorerne til enhver af Koefficienterne C_0, C_1, C_2, ... paa den ene Side af Lighedstegnet lig med Faktorerne til enhver af de samme Koefficienter C paa den anden Side af Lighedstegnet og derved erholde lige saa mange Ligninger, som der er Koefficienter C i Rækken (3). I de første $(n+s)$ af disse Ligninger, svarende til henholdsvis C_0, C_1, ... C_{n+s-1}, eller til henholdsvis ethvert af Leddene C_0, $C_1\,t$, ... $C_{n+s-1}\,t^{n+s-1}$ af Y, vil der altsaa i (29) i Stedet for Y komme t^q, idet q er $= 0, 1, 2, \ldots (n+s-1)$, og i Stedet for $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1}\overset{(n)}{v}\,dt$ komme 0. I de følgende Ligninger vil der i Stedet for Y komme t^q, idet $q = n+s,\ n+s+1, \ldots$, og i Stedet for $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1}\overset{(n)}{v}\,dt$ komme $\overset{(n)}{Q}_p$, idet $p = 0, 1, 2, \ldots$

Derved faas, ved at sætte $q = 2k$ og $q = 2k+1$,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2k+1} = \sum_{r=1}^{r=n} \overset{(n)}{\Omega}_r\, t_r^{2k},\ \text{idet } k = 0, 1, 2, \ldots (k'-1) \text{ for } (n+s) = 2k', \\ \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \ldots k' \text{ for } (n+s) = 2k'+1, \\ \text{og } 0 = \sum_{r=1}^{r=n} \overset{(n)}{\Omega}_r\, t_r^{2k+1},\ \text{idet } k = 0, 1, 2, \ldots (k'-1) \text{ for } (n+s) = 2k', \\ \qquad\qquad \text{og } (n+s) = 2k'+1, \end{array}\right\} (31)$$

samt

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2k+1} - \sum_{r=1}^{r=n} \overset{(n)}{\Omega}_r\, t_r^{2k} = \overset{(n)}{Q}_{2k-(n+s)}, \\ \qquad \text{idet } k = k', k'+1, \ldots \text{ for } (n+s) = 2k', \\ \qquad k = k'+1, k'+2, \ldots \text{ for } (n+s) = 2k'+1, \\ \text{og } -\sum_{r=1}^{r=n} \overset{(n)}{\Omega}_r\, t_r^{2k+1} = \overset{(n)}{Q}_{2k+1-(n+s)}, \\ \qquad \text{idet } k = k', k'+1, \ldots \text{ for } (n+s) = 2k' \\ \qquad\qquad \text{og } (n+s) = 2k'+1. \end{array}\right\} (32)$$

Ligningerne (31) ere i Antal $(n+s)$ og altsaa tilstrækkelige til Bestemmelsen af de n Integrationskoefficienter $\overset{(n)}{\Omega}_r$ i (29) og af

de s ikke givne Abscisser, over hvilke man har villet disponere saaledes, at Korrektionen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1}\overset{(n)}{v}\,dt$ i (29) bliver af Ordenen $(n+s)$. Til den sidste Bestemmelse egne Ligningerne sig ved større Værdier af n kun daarligt. **Abscisserne bør helst bestemmes forud paa anden Maade**, saaledes som det i det foregaaende (jvfr. Formlerne (17)′ og (23)) er udviklet, saa at man alene benytter de n første af Ligningerne (31) til Bestemmelsen af de n Størrelser $\overset{(n)}{\Omega}_r$. **Korrektionen** erholdes i Reglen lettest, ifølge (18), ved den direkte Beregning

$$\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1}\overset{(n)}{v}\,dt = \frac{h}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(n,t)\,C_{n+s}\,t^s + \ldots)\,dt,$$

men kan, ifølge (30) og (32), ogsaa erholdes

for $(n+s) = 2k'$ ved

$$\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1}\overset{(n)}{v}\,dt = C_{n+s}\left(\frac{1}{n+s+1} - \sum_{r=1}^{r=n}\overset{(n)}{\Omega}_r\,t_r^{n+s}\right) - C_{n+s+1}\sum_{r=1}^{r=n}\overset{(n)}{\Omega}_r\,t_r^{n+s+1} + \ldots$$

og for $(n+s) = (2k'+1)$ ved

$$\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1}\overset{(n)}{v}\,dt = -\,C_{n+s}\sum_{r=1}^{r=n}\overset{(n)}{\Omega}_r\,t_r^{n+s} + C_{n+s+1}\left(\frac{1}{n+s+2} - \sum_{r=1}^{r=n}\overset{(n)}{\Omega}_r\,t_r^{n+s+1}\right)\ldots \qquad (33)$$

Naar der nu mellem de n Abscisser $t_1, t_2, \ldots t_n$ skal bestaa Relationerne (24), saa at Abscisserne ere ordnede symmetrisk med Hensyn til Begyndelsespunktet, vil man, ifølge (24) og (27),

ved $n = 2m$ faa

$$t_{2p-1} = -\,t_{2p} = +\,u_p \text{ og } \overset{(2m)}{\Omega}_{2p-1} = \overset{(2m)}{\Omega}_{2p} = \overset{(2m)}{\omega}_p \text{ og}$$

ved $n = (2m+1)$ faa

$$t_1 = 0,\ t_{2p} = -\,t_{2p+1} = +\,u_p,\quad \overset{(2m+1)}{\Omega}_1 = \overset{(2m+1)}{\omega}_0 \text{ og } \overset{(2m+1)}{\Omega}_{2p} = \overset{(2m+1)}{\Omega}_{2p+1} = \overset{(2m+1)}{\omega}_p\,, \qquad (34)$$

hvorved det 2det System af Betingelserne (31) vil være tilfredsstillet, idet man faar $\sum_{r=1}^{r=n} \overset{(n)}{\Omega_r}\, t_r^{2k+1} = 0$, som tillige, ifølge (33), vil medføre, at Korrektionen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt$ stedse bliver af lige Orden. Man kan derfor se bort fra den 2den Ligning (33) og stedse antage, at $(n+s)$ er lige, idet man, naar n er $= (2m+1)$, regner Abscisseværdien $t_1 = 0$ med til dem, der ikke have været oprindelig givne, men over hvilke man har disponeret saaledes, at Korrektionen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt$ i (29) bliver af Ordenen $(n+s)$. Man kan da stedse antage, at der har været givet q af de m Abscisseværdier u_1, u_2, u_m, eller at der har været givet $(n-s) = 2q$ af de n Abscisser $t_1, t_2, \ldots t_n$, og at der har været disponeret over $s = (n-2q)$ af disse Abscisser saaledes, at Korrektionen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt$ i (29) bliver af Ordenen $(n+s) = 2(n-q)$ eller erholder den i (28) angivne Værdi, som nu, ifølge (33), ogsaa vilde kunne beregnes saaledes

$$\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt = C_{2(n-q)}\left(\frac{1}{2(n-q)+1} - 2\sum_{p=1}^{p=m} \overset{(n)}{\omega_p} \cdot u_p^{2(n-q)}\right) \quad (35)$$

Samtidig hermed ville Formlerne (29) antage Formen (27), og det 1ste System af Formlerne (31) forandres til,

$$\left.\begin{array}{l} \text{ved } n = 2m,\ \dfrac{1}{2k+1} = 2\sum\limits_{p=1}^{p=m} \overset{(2m)}{\omega_p} \cdot u_p^{2k}, \\ \qquad\qquad \text{idet } k = 0, 1, 2, \ldots (2m-q-1), \\ \text{og ved } n = 2m+1, \left\{\begin{array}{l} 1 = \overset{(2m+1)}{\omega_0} + 2\sum\limits_{p=1}^{p=m} \overset{(2m+1)}{\omega_p}, \\ \dfrac{1}{2k+1} = 2\sum\limits_{p=1}^{p=m} \overset{(2m+1)}{\omega_p} \cdot u_p^{2k}, \\ \qquad \text{idet } k = 1, 2, \ldots (2m-q). \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (36)$$

Med Hensyn til Betegnelsen $2q$ for Antallet af givne Abscisser vil det erindres, at dette Antal, naar de givne Abscisser ere Intervallets Grænseværdier: -1 og $+1$ (l Gange for hver Grænse), i det foregaaende er bleven betegnet ved $2l$.

Tabeller over Værdierne af Abscisserne og Integrationskoefficienterne $\overset{(n)}{\omega}$ saa vel som over Korrektionen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1}\overset{(n)}{v}\,dt$ i (27) findes for de tidligere anførte Tilfælde, i hvilke der har fundet en Beregning Sted, angivne S. 193 og S. 194 i Gehejmeraad Andræs og S. 27 i Prof. Oppermanns fornævnte Afhandlinger, i den sidstnævnte Afhandling dog kun (ved $n = 1, 2, \ldots 7$) for de Gaussiske Formler, der faas af (23) ved deri at sætte $l = 0$, i den førstnævnte Afhandling derimod (ved $n = 1, 2, \ldots 6$) ogsaa for de Cotesiske Formler og Tilfældet $\overset{(n)}{\omega} = \frac{1}{n}$, men der beregnede for et Interval $\left(-\frac{1}{2} \leqq t \leqq +\frac{1}{2}\right)$, hvorfor Abscisseværdierne i disse Tabeller maa multipliceres med 2 for at henføres til det her brugte Interval $(-1 \leqq t \leqq +1)$.

Formlerne (36) egne sig, ligesom de almindeligere Formler (31), ikke til Bestemmelsen af de ikke givne Abscisser, der helst bør bestemmes forud paa anden Maade, saa at man alene benytter de første (ɔ: for $k \leqq m$) af Ligningerne (36) til Beregningen af Integrationskoefficienterne $\overset{(n)}{\omega}$, hvis man ikke vil foretrække at udføre denne Beregning paa den i (27) angivne direkte Maade. Ved enkelte simple, for Koefficienterne $\overset{(n)}{\omega}$ givne Betingelser eller Funktionsformer lade Abscisseværdierne u_p sig dog ogsaa for større Værdier af m let bestemme af (36). Dette gjælder da især med Hensyn til det fornævnte, af Gehejmeraad Andræ behandlede, Tilfælde, ved hvilket der er givet den Betingelse, at alle Koefficienterne $\overset{(n)}{\omega}$ skulle være indbyrdes lige store. Man faar da af det 1ste System (36) ved $k = 0$ og af den 2den (36), saa vel for $n = 2m$ som for $n = 2m + 1$,

$$\overset{(n)}{\omega} = \frac{1}{n}.$$

Formlerne (36), med Undtagelse af de 2 allerede benyttede, ville derefter give Summerne af de k'te Potenser af $u_1^2, u_2^2, \ldots u_m^2$, der ere Rødderne i

$$\psi(m, t^2) = (t^2 - u_1^2)(t^2 - u_2^2)\ldots(t^2 - u_m^2) = (t^2)^m + \overset{(n)}{a}_2 (t^2)^{m-1} + \ldots + \overset{(n)}{a}_{2m} = 0,$$

hvorefter man paa bekjendt Maade af $\Sigma u_p^2, \Sigma (u_p^2)^2, \ldots \Sigma (u_p^2)^m$ kan finde de m Koefficienter $\overset{(n)}{a}_2, \overset{(n)}{a}_4, \ldots \overset{(n)}{a}_{2m}$ og derpaa bestemme Rødderne i $\psi(m, t^2) = 0$. Da k i (36) maa gives Værdier indtil m inklusive, bliver $q = (m - 1)$ for $n = 2m$, og $q = m$ for $n = (2m + 1)$. Korrektionen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt$ til den særdeles simple Formel

$$\int_g^{g+h} Y\, dx = h \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n}.$$

bliver derfor, ifølge (28) og (35) af Ordenen $2(m + 1)$, altsaa for $n = 2m$ af Ordenen $(n + 2)$, men for $n = (2m + 1)$ kun af Ordenen $(n + 1)$. Den opnaaede Nøjagtighed er altsaa, i Forhold til større Værdier af n, ikke meget stor; men dette opvejes for en Del af Formlens store Simpelhed og den dermed følgende lette Beregning.

En Løsning af ganske lignende Art med Hensyn til Bestemmelsen af Abscisseværdierne u_p erholdes ved den for Koefficienterne $\overset{(n)}{\omega}_1, \overset{(n)}{\omega}_2, \ldots \overset{(n)}{\omega}_m$ givne Betingelse, at man skal have $\overset{(n)}{\omega}_p = \frac{K}{u_p^2}$. Værdien af Konstanten K erholdes ved i det første og sidste System (36) at sætte $k = 1$. Derved faas, saavel for $n = 2m$ som for $n = 2m + 1$, at K er $= \frac{1}{6m}$, altsaa

$$\overset{(n)}{\omega}_p = \frac{1}{6m \,.\, u_p^2}.$$

Foruden Konstanten K og de m Abscisseværdier u_p skal, naar n er $= 2m + 1$, ogsaa $\overset{(2m+1)}{\omega}_0$, altsaa i Alt $(m + 2)$ Størrelser be-

stemmes, hvorfor k i (36), naar n er $= 2m + 1$, maa gives Værdier indtil $k = m + 1$, hvorimod k, naar n er $= 2m$, kun skal have Værdier indtil $k = m$. Derfor bliver i (27) Korrektionerne

$$\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt:$$

$$\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(2m)}{v}\, dt - h\,C_{2(m+1)} \int_0^1 \psi(m, t^2)\,.\,t^2\, dt + \ldots$$

og

$$\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(2m+1)}{v}\, dt - h\,C_{2(m+2)} \int_0^1 \psi(m, t^2)\,.\,t^4\, dt + \ldots$$

eller henholdsvis for $n = 2m$ af Ordenen $2(m+1) = n + 2$ og for $n = (2m+1)$ af Ordenen $2(m+2) = n + 3$. Nøjagtigheden er altsaa for $n = 2m$ den samme som i det foregaaende Tilfælde $\left(\text{alle } \overset{(n)}{\omega} = \frac{1}{n}\right)$, men for $n = (2m+1)$ to Ordener højere.

$k = 2, 3, \ldots m$, eller $k - 1 = i = 1, 2, 3, \ldots (m-1)$ i det første System (36), gjældende for $n = 2m$, og $k - 1 = i = 1, 2, 3, \ldots m$ i det sidste System (36), gjældende for $n = (2m+1)$, give i begge Tilfælde, efter at Ligningerne ere blevne multiplicerede med $\frac{1}{2K} = 3m$,

$$\sum_{p=1}^{p=m} (u_p^2)^i = \frac{3m}{2i+3}, \text{ idet } i = 1, 2, \ldots (m-1) \text{ for } n = 2m,$$
$$\text{og } i = 1, 2, \ldots m \text{ for } n = 2m + 1.$$

Heraf bestemmes da, idet $u_1^2, u_2^2, \ldots u_m^2$ ere Rødderne i Ligningen

$$\psi(m, t^2) = (t^2 - u_1^2)(t^2 - u_2^2)\ldots(t^2 - u_m^2) =$$
$$(t^2)^m + \overset{(n)}{a_2}(t^2)^{m-1} + \ldots + \overset{(n)}{a}_{2(m-1)}\, t^2 + \overset{(n)}{a}_{2m} = 0,$$

som bekjendt de $(m-1)$ Koefficienter $\overset{(2m)}{a_2}, \overset{(2m)}{a_4}, \ldots \overset{(2m)}{a}_{2(m-1)}$ for $n = 2m$ og de m Koefficienter $\overset{(2m+1)}{a_2}, \overset{(2m+1)}{a_4}, \ldots \overset{(2m+1)}{a}_{2m}$ for $n = (2m+1)$ efterhaanden ved

$$\frac{1}{2i+3}+\frac{\overset{(n)}{a_2}}{2i+1}+\frac{\overset{(n)}{a_4}}{2i-1}+\ldots+\frac{\overset{(n)}{a}_{2(i-1)}}{5}+\frac{i}{3m}\overset{(n)}{a}_{2i}=0,$$

idet $i=1, 2, \ldots (m-1)$ for $n=2m$,

og $i=1, 2, \ldots m$ for $n=2m+1$.

For $n=(2m+1)$ erholdes herved alle Koefficienterne $\overset{(2m+1)}{a}$ i $\psi(m, t^2)=0$, saa at Rødderne $u_1^2, u_2^2, \ldots u_m^2$ kunne bestemmes, og Koefficienten $\overset{(2m+1)}{\omega_0}$ kan, idet $\sum_{p=1}^{p=m}\frac{1}{u_p^2}$ er $=-\frac{\overset{(2m+1)}{a}_{2(m-1)}}{\overset{(2m+1)}{a}_{2m}}$, ifølge den 2den (36), bestemmes ved

$$\overset{(2m+1)}{\omega_0}=1+\frac{\overset{(2m+1)}{a}_{2m-2}}{3m\,.\,\overset{(2m+1)}{a}_{2m}}.$$

For $n=2m$ er derimod $\overset{(2m)}{a}_{2m}$ endnu ikke bleven bestemt; men den erholdes af det 1ste System (36) for $k=0$, idet man i Stedet for $\sum_{p=1}^{p=m}\frac{1}{u_p^2}$ sætter $-\frac{\overset{(2m)}{a}_{2(m-1)}}{\overset{(2m)}{a}_{2m}}$. Man faar derved

$$\overset{(2m)}{a}_{2m}=-\frac{\overset{(2m)}{a}_{2(m-1)}}{3m},$$

hvorefter $\psi(m, t)$ kan dannes, og $u_1^2, u_2^2, \ldots u_m^2$ findes som Rødderne i $\psi(m, t^2)=0$.

Man finder saaledes, at

$n=1$ giver $\varphi(1, t)=t\,.\,\psi(0, t^2)=t$, $\overset{(1)}{\omega_0}=1$,

$n=2$ — $\varphi(2, t)=\psi(1, t^2)=t^2-\frac{1}{3}$,

$n=3$ — $\varphi(3, t)=t\,.\,\psi(1, t^2)=t\left(t^2-\frac{3}{5}\right)$, $\overset{(3)}{\omega_0}=\frac{4}{9}$,

$n=4$ — $\varphi(4, t)=\psi(2, t^2)=t^4-\frac{6}{5}t^2+\frac{1}{5}=$
$(t^2-1)\left(t^2-\frac{1}{5}\right)$,

$n=5$ — $\varphi(5, t)=t\,.\,\psi(2, t^2)=t\left(t^4-\frac{6}{5}t^2+\frac{51}{175}\right)=$
$t(t^2-0{,}8618615)(t^2-0{,}3381385)$, $\overset{(5)}{\omega_0}=\frac{16}{51}$.

. . . .

Den her for $\varphi(4, t)$ erholdte Værdi er fuldstændig sammenfaldende med den, som erholdes af (23) for $n = 4$ og $l = 1$, et Resultatet, som kunde forudses, fordi Korrektionen $\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(n)}{v}\, dt =$

$\frac{h}{2}\int_{-1}^{+1} \overset{(2m)}{v}\, dt$ skal i det første, her behandlede, Tilfælde være af Ordenen $(n + 2) = 2(m + 1) = 4 + 2 = 2(2 + 1) = 6$ og i det sidste Tilfælde være af Ordenen $2(n - l) = 2(4 - 1) = 6$.

DEN FØRSTE BESTEMMELSE AF EN KRUM LINIES LÆNGDE.

(AF S. A. CHRISTENSEN).

Det første Forsøg i denne Retning gjordes af Archimedes, idet han bestemte en Grænseværdi for π. Dette blev efterfulgt af mange, som vi ikke skulle opholde os ved. Den første Kurve, som det lykkedes at rektificere, var den semikubiske Parabel, der ogsaa kaldes den Neilske Parabel efter den Mand, hvem det først lykkedes at finde dens Længde.

Da imidlertid en anden Mathematiker omtrent samtidig naaede det samme, har der været nogen Uenighed om, hvem der skulde have Æren derfor. Det er dette Spørgsmaal, vi ville gjøre til Gjenstand for vore Undersøgelser her.

I Aaret 1659 offentliggjordes af Schooten et Brev fra v. Heuraët om Kurvers Rektifikation, og noget senere samme Aar udkom i et Brev til Huygens fra Wallis Neils Opdagelse, som han havde været i Besiddelse af siden 1657.

Vi skulle nu først se v. Heuraëts Fremstilling, som den findes i det ovennævnte Brev til Schooten, der er offentliggjort i Schootens Udgave af Descartes Geometri.

Heuraët gaar ud fra den Kurve, han vil rektificere, og hvis Ligning han ikke opstiller, det er en aldeles vilkaarlig Kurve, som dog skal være symmetrisk om en Axe. Han paaviser da, at han kan finde en anden Kurve, saaledes at Arealet mellem denne, Axen og Endeordinaterne er lig Produktet af en vis Linie (af hvis Størrelse Parametren i den fundne Kurve afhænger) og Længden af den givne Kurve.

Er nu den fundne Kurve en Kurve, hvis Kvadratur man kan bestemme, saa er den givne Kurves Rektification ogsaa bestemt, og omvendt, kan den Kurve, man kommer til, ikke kvadreres, kan man heller ikke finde den givne Længde.

Han paaviser derved tydelig og klart Afhængigheden mellem de to Problemer. Det gjælder for Heuraët at bevise den Sætning, at den givne Linie (p) gange Bueelementet (ds) er lig Arealelementet for den søgte Kurve ($Y\,dx$), idet han gaar ud fra Relationen $\frac{y}{v} = \frac{p}{Y}$, hvor v er Normalen til det betragtede Punkt af den givne Kurve, y dets Ordinat og Y Ordinaten til det tilsvarende Punkt af den søgte Kurve.

Ved at tegne en Figur vil man ved Anvendelse af den meget lille Trekant af Siderne ds, dx og dy faa $y : v = dx : ds$ og ved Hjælp af den givne Proportion $dx : ds = p : Y$, hvoraf $Y\,dx = p\,ds$, hvilket giver os det søgte, at de to Arealelementer ere de samme, og da bliver Summen indenfor de samme Grænser den samme. Dette er Heuraëts Fremgangsmaade, idet jeg blot afviger fra ham ved de moderne Betegnelser, uden at jeg derved har foretaget nogen Forandring i Beviset.

For at kunne anvende denne Sætning, gjælder det blot om af den givne Kurves Ligning at kunne finde Ligningen for den søgte Kurve.

Vi skulle nu se, hvorledes Heuraët anvender Sætningen paa den semikubiske Parabel $y^2 = x^3 : a$. Han søger først Normalens Længde v ved Hjælp af de retvinklede Trekanter, som dannes af Tangent, Ordinat og Normal. Han faar da $v = \sqrt{\frac{9x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{a}}$.

Af Proportionen $\frac{y}{v} = \frac{p}{Y}$ faas, idet han sætter $p = \frac{1}{3}a$, $Y = \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{1}{9}a^2}$ ɔ: en almindelig Parabel med Toppunkt i Punktet $\left(-\frac{4}{9}a, 0\right)$ og med Parametren $\frac{1}{4}a$. Arealet fra Begyndelsespunktets Ordinat $\left(=\frac{1}{3}a = p\right)$ til Ordinaten i Afstanden m fra Toppunktet er da lig $\frac{1}{3}\sqrt{am^3} - \frac{8}{81}a^2$, og Længden af den semikubiske Parabel fra dens Toppunkt til Skjæring med den samme Ordinat er $\sqrt{\frac{m^3}{a}} - \frac{8}{27}a$, hvor $m = x + \frac{4}{9}a$.

Paa samme Maade kan man for Ligningerne $y^4 = \frac{x^5}{a}$, $y^6 = \frac{x^7}{a}$, $y^8 = \frac{x^9}{a}$ o. s. v. naa til Kurver, der kunne kvadreres, saa at Kurver, fremstillede ved disse Ligninger, kunne rektificeres. Han udfører imidlertid ikke dette Arbejde, og det behøves heller ikke, han har jo vist Fremgangsmaaden.

Inden han slutter, viser han, at det er umuligt at rektificere Parablen, thi den fører til Hyperblens Kvadratur, saaledes altsaa at disse to Opgaver ere afhængige af hinanden.

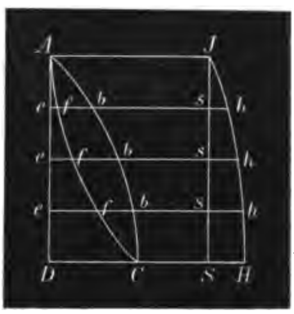
Efter det foregaaende er der ingen Anledning til at gjennemgaa hans Bevis for Parablen, kun skal bemærkes, at han giver Parablen om y-Axen, saa Normalen bliver Stykket paa denne Linie udenfor Kurven til x-Axen.

Heuraët har altsaa fundet en almindelig Sætning, hvorpaa han kan støtte Kurvernes Rektifikation og derved tillige Afhængigheden mellem Kurvers Rektifikation og andre derved bestemte Kurvers Kvadratur i al Almindelighed, tillige er han den første, der har paavist Afhængigheden mellem Parabel og Hyperbel. Selv om Huygens, som han i Horologium oscillatorium (pag 72) hævder, siden Slutningen af 1657 har været i Besiddelse af denne sidst omtalte Afhængighed, kan der derfor ikke tillægges ham Æren for at have fundet den, skjønt han skal have meddelt nogle Venner

den. Hos ham har den staaet isoleret, medens den hos Heuraët kommer som et Led i en hel Udvikling.

Vi skulle nu se paa Neils Fremstilling, som den findes hos Wallis 1659 i den sidste af Afhandlingerne: Tractatus duo, prior .... Posterior, Epistolaris; in qua agitur, de Cissoide, et corporibus inde genitis... Anno 1659 Editi. (Se Opera mathematica I). Det er en Afhandling i Brevform til Huygens, hvori han har optaget Neils Fremstilling, efter at Huygens i et Brev har omtalt Heuraëts Arbejde.

I Neils Fremstilling mangle vi den fuldstændige Almindelighed, som findes hos Heuraët. Han gaar ud fra Parablen AbC og danner derved Kurven AfC, som bliver den semikubiske Parabel, og saa viser han, at $ADHJ : ADSJ = AfC : AD$ og at Kurven HJ er en Parabel.



AD er Abscisseaxen, der er delt i et vilkaarligt Antal Dele, ee. Vi kalde $AD = a$ og $DC = c$.

Kurven AfC dannes efter Proportionen $ef : c = Aeb : ADC$, ɔ: hvis den givne Parabel har Ligningen $y^2 = px$ og $ef = z$, faas $z^2 = \frac{px^3}{a}$, der er Ligningen for den semikubiske Parabel. Naar jeg her og i det følgende stadig bruger Opstilling af Ligningerne, er det egentlig ikke korrekt, Neil har dem ikke, han udsiger det hele i Ord; men da jeg følger hans Fremgangsmaade, vil der ikke i Virkeligheden være nogen Forskjel.

Vi se allerede her Forskjellen mellem Neil og Heuraët; thi denne gaar ud fra AfC som værende en almindelig Kurve, medens Neil kun tager den specielle Kurve.

Han indfører Rektanglen DJ saaledes, at $\sqsubset\!\sqsupset DJ : ADC = AD : DC$, ɔ: $DS = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} a$, og afsætter derpaa Ordinaterne eh, saa at $eh^2 = es^2 + eb^2$, (som giver Kurven, Heuraët finder).

Derpaa beviser han, at $ADHJ : ADSJ = AfC : AD$, idet Beviset naturligvis indskrænkes til et Element af Arealet af Kurven.

Da $ef : Aeb = c : ADC$, vil $(ef - ef) : \sqsubset\!\sqsupset eb = c : ADC = \frac{1}{\frac{2}{3}a} = \frac{1}{es}$, o: $(ef - ef)^2 = \left(\frac{ee \,.\, eb}{es}\right)^2$, og Linieelementet er da

$ff^2 = \frac{ee^2}{es^2}(es^2 + eb^2) = \frac{ee^2}{es^2} \,.\, eh^2$, og da har man $\frac{ff}{a} = \frac{ee}{es} \cdot \frac{eh}{a} = \frac{\sqsubset\!\sqsupset eh}{\sqsubset\!\sqsupset DJ}$, hvad der skulde bevises.

Vi komme herfra til den Form, som Heuraët har givet Sætningen af Ligningen ovenfor, deraf faas nemlig $ff \,.\, es = ee \,.\, eh$, her er da den konstante Linie, $es = AJ$, den samme, som Heuraët benytter, men mere almindelig end Neil.

Tilbage staar nu for Neil at vise, at Buen JH er en Parabelbue. Ses paa $eh^2 = es^2 + eb^2$ faas $Y^2 = \frac{4}{9}a^2 + px$, som er Ligningen for en Parabel, hvis Kvadratur kjendes.

Neil fører altsaa ligesom Heuraët Opgaven tilbage til Kvadratur, men kun for et enkelt Exempel. Man bør derfor tilskrive Heuraët den største Del af Æren for denne Opdagelse, skjønt han først senere end Neil er kommen til den, thi Heuraët har vel neppe fundet det før 1658, medens Neil, efter Wallis (Brev til Oldenburg 1673, 4. Oktbr. i Philosophical Transactions 1673) i 1657 havde meddelt ham og andre Venner denne Rektification i Gresham College. I samme Brev anfører han et Citat af Brouncker, hvori denne anser det for rimeligt, at Heuraët har plagieret Neil, skjønt man maa erindre, at Neils Arbejde udkom efter Heuraëts. Dog skal bemærkes, at Heuraët derfor nok kunde være i Besiddelse af Oplysninger om Neils Opdagelse; men hans Arbejdes Resultater synes at maatte kunne beskytte ham mod Beskyldningen for Plagiator. De vise i alle Tilfælde, at han bedre end Neil selv forstod Rækkevidden af sin Theori.

Endnu skal kun bemærkes, at Christ. Wren, efter at være bleven bekjendt med Neils Arbejde, har ændret hans Bevis ved at indføre de analytiske Betegnelser i 1658, og samme Aar fandt han Længden af Cycloiden, der er offentliggjort i Wallis' første Afhandling, hvis Titel ovenfor er meddelt, men findes ad anden Vej end denne almindelige.

LØSNING AF OPGAVERNE 531 OG 543.

531. En ret Linie AB drejes en Vinkel α om det ene Endepunkt A, dernæst en Vinkel β om B; dernæst atter en Vinkel α om A og β om B, og saaledes fortsættes. I hvilken Stilling kommer Linien, efter at den nævnte Operation er gjentaget n Gange?

(H. Valentiner).

Betegnes den Stilling, som AB efter n Drejninger om hvert Endepunkt er bragt til, ved $A_n B_n$, og halverer man efter de første Drejninger α og β, som have samme eller modsatte Fortegn, vil Halveringsliniernes Skjæringspunkt O være Centrum for to Cirkler med Radierne $OA = OA_n$ og $OB = OB_n$. Punkterne A_n og B_n findes nu, ved at man lader A og B hver paa sin Cirkel gjennemløbe Buen

$$M = n(\alpha + \beta) + 2p\pi,$$

hvor p er et positivt eller negativt helt Tal eller 0.

Naar de givne Vinkler, med samme eller modsatte Fortegn, ere ligestore, ville de to Cirkler enten blive sammenfaldende eller faa et uendelig fjærnt Centrum. I sidste Tilfælde blive Cirkelbuerne AA_n og BB_n to parallele rette Linier og hver for sig lig med $2n \,.\, AB \sin \frac{1}{2}\alpha$.

(N. Lund).

543. Man skal vise, at

$$\alpha_0 \frac{n^n}{[n]} + \alpha_1 \frac{(n-1)^n}{[n-1]} + \alpha_2 \frac{(n-2)^n}{[n-2]} + \dots$$

altid er et helt Tal, naar n er positiv hel og

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 1 - \frac{1}{1},\ \alpha_2 = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{[2]},\ \alpha_3 = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{[2]} - \frac{1}{[3]}$$

o. s. v.[1])

(Julius Petersen).

---

[1]) Rettet af Opgavestilleren.

Idet Rækken deles saaledes:

$$\frac{n^n}{[n]} - \frac{1}{1}\frac{(n-1)^n}{[n-1]} + \frac{1}{[2]}\frac{(n-2)^n}{[n-2]} - \frac{1}{[3]}\frac{(n-3)^n}{[n-3]} + \dots$$

$$+ \frac{(n-1)^n}{[n-1]} - \frac{1}{1}\frac{(n-2)^n}{[n-2]} + \frac{1}{[2]}\frac{(n-3)^n}{[n-3]} + \dots$$

$$+ \frac{(n-2)^n}{[n-2]} - \frac{1}{1}\frac{(n-3)^n}{[n-3]} + \dots,$$

$$\vdots$$

kan Summen skrives

$$\frac{f(n,n)}{[n]} + \frac{f(n,n-1)}{[n-1]} + \frac{f(n,n-2)}{[n-2]} + \dots,$$

hvor $f(n,a) = a^n - \frac{a}{1}(a-1)^n + \frac{a(a-1)}{1.2}(a-2)^n \dots,$

og det kan nu bevises, at hvert enkelt Led er et helt Tal. Hertil udfordres, at $[a]$ gaar op i $f(n,a)$, hvor $a \leqq n$, men denne Indskrænkning er unødvendig, saa a her betegner et vilkaarligt helt Tal.

Af Formlen

$$a\,(f(n,a) + f(n,a-1)) = f(n+1,a) \qquad (1)$$

indser man, at naar $[a]$ gaar op i $f(n,a)$, $[a-1]$ i $f(n,a-1)$, da gaar $[a]$ op i $f(n+1,a)$.

Da endvidere

$$f(1,a) = a - \frac{a}{1}(a-1) + \frac{a(a-1)}{1.2}(a-2)\dots = a(1-1)^{a-1} = 0,$$

faar man, naar der forudsættes, at $[a-1]$ gaar op i $f(n,a-1)$, idet n er vilkaarlig hel, ved efterhaanden at benytte (1), at

$$f(2,a),\ f(3,a)\dots f(n,a)$$

alle ere delelige med $[a]$, og da $f(n,1)$ er delelig med $[1]$, bliver saaledes

$$f(n,2) \text{ delelig med } [2],\ f(n,3) \text{ med } [3] \text{ o. s. v.,}$$

saa at Sætningen er bevist.

(A. S. **Bang**).

OPGAVER TIL LØSNING.

551. Bevis, at de fire Røringscirkler til tre Cirkler, som gaa igjennem samme Punkt, ogsaa alle ville røre en og samme fjerde Cirkel. (J. P. Gram).

552. At konstruere en Trekant af en Vinkel, Summen af de indesluttende Sider og Højden paa den tredie.
(S. A. Christensen).

OPGAVER TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN.

(Givne af Prof. STEEN til 4 Kl. Examen, men ikke offentliggjorte).

89. Find x af Ligningen

$$\sqrt[3]{4\sqrt{12(1+x)}} + \sqrt{3\sqrt[3]{81(1+x)}} = 15. \quad (x = 242).$$

90. Find y i Ligningen $x^2 - 11x + y = 0$, naar Summen af Róddernes Kvadrater er 85, naar Ligningen løses med Hensyn til x. $(y = 18)$.

91. I en given Cirkel at indskrive et Trapez af en Diagonal og de parallele Siders Afstand.

92. Med Korden til 90° som Radius og Centrum et vilkaarligt Sted i Periferien tegnes en Bue. Find Forholdet mellem Cirklens to Dele. $\left(\frac{\pi - 1}{1}\right)$.

93. Konstruer et omskriveligt Trapez af de ikke parallele Sider og de parallele Siders Afstand.

94. Det geometriske Sted for Midtpunktet af den 3die Side i en Trekant, hvor en Vinkel ligger fast og Summen af dens indesluttende Sider er konstant, er en ret Linie, Grundlinie i den ligebenede Trekant, der har Sidernes halve Sum til Ben og den faste Vinkel ved Toppunktet.

95. At konstruere en Trekant af en Vinkel, Summen af de indesluttende Sider og Medianen til den tredie.

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von | Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og **H. G. Zeuthen.**

FEMTE RÆKKE.

Femte Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAPS ETABL. — KJØBENHAVN.

1887.

FEMTE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Linnésgade 16 A, 3. Sal, Kjøbenhavn K.

OM RÆKKEUDVIKLINGER AF EN ALGEBRAISK LIGNINGS RØDDER.

(AF N. MADSEN.)

1. Af Ligningen

$$\varphi(y) + x = 0, \tag{1}$$

hvor $\varphi(y)$ betegner en algebraisk hel Funktion af n'te Grad, kan man ved Mac-Laurins Formel fremstille en Rækkeudvikling for $y = \psi(x)$, efter Potenser af x, idet $\psi(0) = a$ forudsættes bekjendt og $\psi'(0)$, $\psi''(0)$ ... etc. bestemmes sukcessivt af Differentialligningerne. For Kortheds Skyld betegnes $(\varphi^{(r)}(y))^p$ ved φ_r^p, $\psi^{(r)}(x)$ ved y_r.

Differentieres (1), idet de fundne Værdier af y_1, y_2 ... efterhaanden indsættes, faas

$$\varphi_1 y_1 + 1 = 0,$$
$$\varphi_1^3 y_2 + \varphi_2 = 0,$$
$$\varphi_1^5 \cdot y_3 + 3\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = 0.$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Ved Induktion kan det bevises, at man maa have

$$\varphi_1^{2r-1} \cdot y_r = \Sigma A \left(\varphi_1^{p_1} \cdot \varphi_2^{p_2} \ldots \varphi_n^{p_n}\right) \tag{2}$$

hvor A betegner et Produkt af konstante Faktorer, der afhænge af r, og hvor man har

$$\left.\begin{aligned} p_1 + p_2 + \ldots + p_n &= r - 1 \\ p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n &= 2(r-1) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Differentieres nemlig (2) faas

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1^{2r+1} y_{r+1} = \\ &\left\{\begin{aligned} &(2r-1)\varphi_2 \cdot \Sigma A\left(\varphi_1^{p_1}\varphi_2^{p_2} \ldots \varphi_n^{p_n}\right) - \\ &\varphi_1 \Sigma A \left\{\begin{aligned} &p_1\left(\varphi_1^{p_1-1}\varphi_2^{p_2+1} \ldots \varphi_n^{p_n}\right) + p_2\left(\varphi_1^{p_1}\varphi_2^{p_2-1}\varphi_3^{p_3+1} \ldots \varphi_n^{p_n}\right) \\ &+ \ldots + p_{n-1}\left(\varphi_1^{p_1}\varphi_2^{p_2} \ldots \varphi_{n-1}^{p_{n-1}-1} \cdot \varphi^{p_n+1}\right) \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

der har samme Form som (2), og hvor Ligningerne (3) gjælde, saafremt de gjælde for (2).

Man ser desuden, at naar ingen Led sammentrækkes, maa man have

$$A \overline{\overline{<}} (2r-1)(2r-3)\ldots 5.3.1 = \overline{(2r-1)}.$$

Kaldes, under samme Forudsætning, Leddenes Antal i (2) P_r, viser (4), at

$$P_{r+1} \overline{\overline{<}} P_r + (n-1) P_r = n P_r,$$

hvoraf følger $\qquad P_r < n^r.$

Man vil altsaa altid have

$$\psi^{(r)}(0) < \frac{(\varphi^{(q)}(a))^{r-1} . \Sigma A}{(\varphi'(a))^{2r-1}} < \frac{n^r \overline{(2r-1)} (\varphi^{(q)}(a))^r}{(\varphi'(a))^{2r}},$$

hvor $\varphi^{(q)}(a)$ betegner den numerisk største af de partielle Differentialkoefficienter $\varphi'(a)$, $\varphi''(a) \ldots \varphi^{(n)}(a)$.

Der kan imidlertid bestemmes en lavere Grænse for ΣA. Man ser nemlig, at der af hvert Led B paa højre Side i (2) dannes dels et Led $(2r-1)\varphi''.B$ i (4) uden Differentiation af B, dels et Antal af højst $n-1$ Led ved B's Differentiation, hvorved indføres Faktorer, der ikke overstige $r-1$. Der kan altsaa i y_r skjelnes mellem Led, der ere fremkomne ved $0, 1, 2 \ldots r$ Differentiationer. Antallet af Led, der ere dannede ved p Differentiationer, er højst $(h-1)^p . C_{r,p}$; derved faas følgende Grænse for Summen A_p af de tilsvarende Led i ΣA

$$A_p < C_{r,p} . (n-1)^p . \overline{(2r-1)} . q^p,$$

hvor q betegner Maximumsværdien af Forholdet $\frac{r-1}{2r-1}$. Da denne er $\frac{1}{2}$, faas

$$\Sigma A < \overline{(2r-1)} \sum_{p=0}^{p=r} C_{r,p} . \left(\frac{n-1}{2}\right)^p = \overline{(2r-1)} . \left(\frac{n+1}{2}\right)^r.$$

Man har nu Grænsen for det r'te Led i den søgte Række

$$u^r < \left(\frac{n+1}{2}\right)^r . \frac{(\varphi^{(q)}(a))^r}{(\varphi'(a))^{2r}} . \frac{\overline{(2r-1)}}{[r]} . x^r < \left(\frac{(n+1}{} \frac{\varphi^{(q)}(a)}{(\varphi'(a))^2} . x\right)^r = s^r,$$

gjældende for ethvert endeligt og uendeligt r.

Da hvert Led i den søgte Række er mindre end det tilsvarende i Rækken

$$1 + s + s^2 + s^3 + \dots,$$

er den første Række konvergent, naar man har

$$s < 1 \text{ eller } x < \frac{(\varphi'(a))^2}{(n+1)\,\varphi^{(q)}(a)}, \tag{5}$$

og Resten
$$R_r < \frac{s^r}{1-s}.$$

Grænsen for x kan dog altid udvides. En nærliggende Udvidelse fremgaar af Ligningerne (3), der give

$$\left.\begin{aligned} p_2 + 2p_3 + \dots + (n-1)p_n &= r-1 \\ (n-1)p_1 + (n-2)p_2 + \dots p_{n-1} &= (n-2)(r-1), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

altsaa
$$p_q < \frac{r-1}{q-1};\ p_1 < \frac{n-2}{n-1}(r-1).$$

$\varphi^{(q)}$ i (5) kan derved erstattes af en Række Potenser, hvis Exponenter have Summen 1, og hvis Rødder ere $\varphi^{(q)}$ og de i numerisk Værdi nærmest lavere Differentialkoefficienter.

2. For herved at bestemme en konvergent Række for en Rod i den algebraiske Ligning

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot z + a_n = 0,$$

sættes først $z = y + \alpha$, hvorved Ligningen ændres til

$$\varphi(y) + x = y^n + \frac{f^{n-1}(\alpha)}{[n-1]} \cdot y^{n-1} + \dots + \frac{f'(\alpha)}{1} \cdot y + f(\alpha) = 0,$$

hvor α kan bestemmes saaledes, at $f(\alpha)$ bliver saa lille, det skal være. Nu benyttes Mac-Laurins Formel, idet man gaar ud fra $\psi(0) = 0$. Naar $f(z) = 0$ ikke har lige Rødder, kunne $f(\alpha)$ og $f'(\alpha)$ ikke samtidig blive uendelig smaa. For saadanne Værdier af $f(\alpha)$ kan altsaa $\varphi'(y)$ ikke være 0 i det Interval, hvor x har Værdier fra 0 til $f(\alpha)$. Funktionerne $\psi'(x)$, $\psi''(x) \dots$ etc., der kun kunne blive uendelige for $\varphi'(y) = 0$ (se (2)), ere altsaa alle endelige kontinuerte i samme Interval. For tilstrækkelig smaa Værdier af $f(\alpha)$ vil Rækken følgelig altid fremstille en Rod i Ligningen; dette maa da vedblive, saa længe Rækken er konvergent. Ifølge (5) kræves hertil, at man samtidig har $f(\alpha)$ mindre end hvert Led i Rækken

$$\frac{f'(\alpha)}{n+1};\ \frac{(f'(\alpha))^2}{(n+1)\,f''(\alpha)};\ \dots\ \frac{(f'(\alpha))^2}{(n+1)\,f^{(n)}(\alpha)} \tag{7}$$

Det vil her være fordelagtigt at sætte $y = \frac{1}{\beta} . y_1$, hvor β er Maximumsværdien af $\sqrt[q-1]{\frac{f^{(q)}(\alpha)}{f'(\alpha)}}$ for $q = 2, 3 \ldots n$; thi da vil man i Stedet for (7) faa en Række Led, der alle ere større end $\frac{f'(\alpha)}{(n+1)\beta}$, saa at man nu blot skal have

$$f(\alpha) < \frac{f'(\alpha)}{(n+1)\beta}, \tag{8}$$

en Grænse, der altid er større end den i (7), da man har

$$\beta < \frac{f^{(q)}(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

β vil imidlertid ikke indgaa i Rækken for y; thi (2) (i Forbindelse med den anden Ligning (3)) viser, at alle Leddene i Rækken for y_1 faa Faktoren β. Denne indføres altsaa alene til Undersøgelse af Konvergensen. Er (8) tilfredsstillet, har man den søgte Række

$$\left.\begin{aligned} z = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^3} \cdot \frac{(f(\alpha))^2}{1 . 2} - \\ \frac{3(f''(\alpha))^2 - f'(\alpha) f'''(\alpha)}{(f'(\alpha))^5} \cdot \frac{(f(\alpha))^3}{1 . 2 . 3} - \ldots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

De to første Led give Newtons Approximationsformel.

Ved efterhaanden at tillægge α Værdier, der kun afvige lidt fra Ligningens reelle Rødder, faas konvergente Rækker for alle disse.

De imaginære Rødder bestemmes paa lignende Maade, idet Konvergensbetingelserne vedblive at gjælde, naar man i Stedet for $f^p(\alpha)$ sætter dens Modulus.

Ex. $f(z) = z^5 + 16z + 1 = 0$. For $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt[4]{\frac{120}{16}}$ er Konvergensbetingelsen (8) opfyldt, og man faar

$$z = -\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16^6} + \ldots\right).$$

Dernæst sættes $\alpha = 2\sqrt[4]{-1}$; $f(\alpha) = 1$; $f^{I}(\alpha) = -64$; $f^{II}(\alpha) = 80\sqrt{2}\,(\sqrt{-1} - 1)$; $f^{III}(\alpha) = 60\sqrt{-1}$; $f^{IV}(\alpha) = 120\sqrt{2}\,(\sqrt{-1} + 1)$; $f^{V}(\alpha) = 120$ samt $\beta = \sqrt[3]{\frac{120}{64}}$, hvorefter (8) er tilfredsstillet, og man faar den imaginære Rod

$$z = \sqrt{2}\,(\sqrt{-1} + 1) + \frac{1}{64} + \frac{40\sqrt{2}}{64^3}(\sqrt{-1} - 1) + \ldots$$

Det maa bemærkes, at skjønt Rækken (9) i Reglen konvergerer stærkt, naar de ovennævnte Konvergensbetingelser ere opfyldte, kan Værdien dog godt i Begyndelsen fjerne sig lidt fra den sande. Det er jo ogsaa bekjendt, at Newtons Formel ikke altid giver Tilnærmelse.

3. En anden Grænse for x, der ofte er betydelig højere end den i (5), kan faas ved Hjælp af Cauchy's Konvergensbetingelse. Forandres nemlig Fortegnene i Rækken (9) saaledes, at de blive ens, saavel for Rækkens Led, som for disses sammensættende Led, maa den saaledes erholdte Række have en numerisk større Sum end den givne. Denne maa altsaa være konvergent samtidig med den førstnævnte.

En saadan Række kommer man til i to Tilfælde, nemlig

(a). $f'(\alpha)$ har modsat Fortegn af de øvrige Differentialkoefficienter.

(b). $f'(\alpha)$ har $\left\{\begin{array}{l}\text{modsat Fortegn af de andre ulige}\\ \text{samme Fortegn som de lige}\end{array}\right\}$ Differentialkoefficienter.

I disse Tilfælde ville nemlig Leddene under det sidste Σ-Tegn i (4) alle have samme Fortegn, saafremt dette gjælder om Leddene i det første Σ. I (a) ere disse to Fortegn ens, i (b) forskjellige. Der maa dog undtages de Led, der opstaa ved Differentiation af φ_1, men man ser let, at disse Led kunne sammendrages med tilsvarende i det første Σ, der have større Koefficienter og altsaa bestemme Fortegnene. I begge Tilfælde maa altsaa Leddene i y_{r+1} alle have samme Fortegn, hvis dette gjælder om Leddene i y_r. Da det finder Sted ved y_1, maa det følgelig vedblive.

Vi ville nu søge Konvergensbetingelserne under Forudsætning

af, at vi have et af Tilfældene (a) eller (b), men ifølge det anførte er den saaledes bestemte Betingelse tilstrækkelig i ethvert Tilfælde. Ifølge (4) haves

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{y_{r+1}}{y_r} \cdot \frac{x}{r+1} < \frac{x}{r+1}\left[(2r-1)\frac{\varphi_2}{\varphi_1^2} - \frac{\Sigma A\left(\varphi_1^{p_1}\varphi_2^{p_2}\ldots\varphi_n^{p_n}\right)\left[p_2 \cdot \frac{\varphi_3}{\varphi_2} + p_3 \cdot \frac{\varphi_4}{\varphi_3} + \ldots + p_{n-1}\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right]}{\varphi_1 \cdot \Sigma A\left(\varphi_1^{p_1}\varphi_2^{p_2}\ldots\varphi_n^{p_n}\right)}\right].$$

Sammenholdes dette Udtryk med den første (6), ser man, at naar C er den største Værdi af Forholdet $\frac{\varphi_p}{(p-2)\,\varphi_{p-1}}$ for $p = 3, 4, \ldots n$ er

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} < \frac{x}{r+1}\left((2r-1)\frac{\varphi_2}{\varphi_1^2} + C \cdot \frac{r-1}{\varphi_1}\right),$$

hvor alle de indgaaende Størrelser regnes uden Fortegn.

Cauchy's Konvergensbetingelse giver da

$$Lim \frac{u_{r+1}}{u_r} < x \cdot \left(\frac{2\varphi_2}{\varphi_1^2} + \frac{C}{\varphi_1}\right) < 1,$$

$$f(a) - x < \frac{\varphi_1^2}{2\varphi_2 + C\varphi_1}. \tag{10}$$

I Tilfældene (a) og (b) har man

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} > \frac{2r-1}{r+1} \cdot \frac{\varphi_2 x}{\varphi_1^2},$$

saa at Resten maa ligge mellem Grænserne

$$\frac{(2r-1)\varphi_2}{(r+1)\varphi_1^2 - (2r-1)\varphi_2 x} \cdot x u_r < R_r < \frac{2\varphi_2 + C\varphi_1}{\varphi_1^2 - (2\varphi_2 + C\varphi_1)x} \cdot x u_r.$$

I alle andre Tilfælde haves

$$R_r < \frac{2\varphi_2 + C\varphi_1}{\varphi_1^2 - (2\varphi_2 + C\varphi_1)x} \cdot x u'_r,$$

hvor u'_r betegner det r'te Led i den Række, der faas ved den nævnte Fortegnsforandring.

Ex. 1. $\qquad x^3 - 3x^2 - 7x - 2 = 0.$

Konvergensbetingelsen (10) er opfyldt for $a = 0$, og man faar

$$z = -\frac{2}{7} + \frac{12}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \dots$$

Da Fortegnene her ere bestandig vexlende, er Fejlen, som bekjendt, mindre end det første Led, der udelades.

Ex. 2. $z^n + az^{n-1} + \dots + az + a = 0.$

Sættes $z = \frac{1}{y}$, faas

$$y^n + y^{n-1} + \dots + y + \frac{1}{a} = 0,$$

$$\frac{\varphi_p}{(p-2)\,\varphi_{p-1}} = \frac{p}{p-2},$$ der har Maximum for $p = 3$.

(10) kræver, at $a > 7$.

Saalænge $r < n$ maa man have $y_r = [r]$; thi forudsættes denne Ligning rigtig, faas

$$y_{r+1} = (2\,(2r-2) - (2p_1 + 3p_2 + \dots + (r+1)p_r))\,[r] = [r+1].$$

(9) giver da

$$y = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^n}\right) + \frac{m}{a^{n+1}} + \dots$$

m kan først bestemmes, naar n er givet, men som første Tilnærmelsesværdi faas

$$z = -\frac{a-1}{a^n - 1} \cdot a^n.$$

Ex. 3. $f(z) = z^5 + az + a = 0.$

Ligningen har for positive a altid en Rod mellem 0 og -1. For negative a har den to negative Rødder (mindre end -1), naar $a < -\frac{5^5}{4^4}$.

For $a = -1$ faas en Række for z, der ifølge (10) er konvergent, naar man har

$$(a+5)^2 > 40 \pm 3\,(a+5),$$

altsaa $a > 3$ eller $a < -13$.

Den sidste Grænse er ikke meget forskjellig fra den ovennævnte Værdi, ved hvilken Ligningen ophører at have negative Rødder.

Man faar følgende Række

$$z = -\left(1 - \frac{1}{a+5} - \frac{10}{(a+5)^3} + \frac{10}{(a+5)^4} - \frac{205}{(a+5)^5} + \ldots\right).$$

For $a < -13$ ere Fortegnene som i (b), og man har da

$$\frac{20\,(2r-1)}{(r+1)(a+5)^2 - 20\,(2r-1)} \cdot u_r < R_r < \frac{25 - 3a}{a\,(a+19)} \cdot u_r,$$

hvor u_r (naar $r > 3$) dog ikke falder sammen med noget enkelt Led i den angivne Rækkeudvikling, der er fremkommen ved en Deling af Leddene i den oprindelige Række.

NOGLE MAXIMUMSPROBLEMER I DEN IKKE-EUKLIDISKE GEOMETRI.

(AF A. S. BANG).

1. Man har som bekjendt i den sædvanlige Plangeometri elementært opstillet en Række Maximumssætninger om Arealer af retliniede Figurer, samt den Sætning, at Cirklen af alle Figurer med samme Omkreds har størst Areal. Navnlig er Steiners Bevis for den sidste Sætning saa simpelt og elegant som vel muligt. Det er fremsat i Crelles Journal 24 Bd., og er gjengivet i Oppermanns Plangeometri. Disse Sætninger ere af Legendre i dennes Geometri udvidede til at gjælde paa Kuglen, og aldeles analoge Sætninger gjælde i den ikke-euklidiske Geometri.

2. Cirklen er den Figur, som med given Omkreds har størst Areal.

Den søgte Maximumsfigur maa være konvex. I modsat Fald kan man trække en ret Linie, der tangerer Kurven i Punkterne A og B uden at skjære den i Punkter, der ligge mellem A og B. Figurens Omkreds deles af A og B i to Dele, af hvilke den ene drejes om AB; derved opstaar da en Figur med samme Omkreds og større Areal end den forrige, men dette er umuligt. Den søgte Figur kan heller ikke bestaa af to adskilte konvexe Dele.

Lægges disse, saa de røre hinanden i O, kommer man endelig tilbage til det foregaaende Tilfælde.

Halverer en Linie AB Maximumsfigurens Omkreds, vil den ogsaa halvere dens Areal. I modsat Fald vilde man ved at dreje den største Del om AB faa en Figur med samme Omkreds og større Areal end Maximumsfiguren. Tangenten i A maa endvidere være vinkelret paa AB; dannede Tangenten til den ene Side af AB en stump Vinkel, vilde der, naar den Halvdel af Figuren, som ligger paa samme Side af AB, drejes om AB, fremkomme en ukonvex Figur med samme Omkreds og Areal som Maximumsfiguren, hvilket er umuligt. Er P et vilkaarligt Punkt af Figuren, og PQ halverer Omkredsen, ville Tangenterne i PQ følgelig være vinkelrette paa P og Q. Skjæringspunktet mellem AB og PQ kaldes O. Trækkes Korden AP, maa Tangenterne i A og P danne lige store Vinkler med AP, ellers vilde man ved at lægge Afsnittet AP om, saa at A falder i P, P i A, faa en ukonvex Figur frem.

Heraf følger atter, at $\angle APO = \angle PAO$, eller at $OA = OP$, og tillige faar man, at $OP = OB$, $OB = OQ$ og endelig $OQ = OA$. Da et vilkaarligt Punkt P saaledes har konstant Afstand fra O, er Maximumsfiguren en Cirkel.

I Beviset er egentlig forudsat, at Punkterne A, B, P og Q ikke ere Spidser, men da der kun kan findes et endeligt Antal af disse, og Kurven saa nær ved hver af disse, man selv vil, ifølge Beviset er en Cirkel, kan der imidlertid ikke findes saadanne.

Dette Bevis gjælder saavel i den sædvanlige euklidiske Geometri som i den ikke-euklidiske Geometri med uendelig og med endelig ret Linie — Lobatchewskys og Riemanns Geometrier — samt ogsaa, naar Drejning og Omlægning opfattes ved at man tegner symmetriske Figurer, paa Kuglen.

3. Gjennem to givne Punkter A og B skal lægges en Linie af given Længde, som med Korden AB danner det størst mulige Areal.

I den sædvanlige Geometri, paa Kuglen og i Riemanns Geometri kan man altid, naar Liniens Længde er større end AB,

lægge en Cirkelbue med den givne Længde gjennem A og B. Denne vil med AB indeslutte Maximum af Areal. Fuldføres Cirklen, opstaar foruden dette Afsnit (A) et andet (B). Var det da muligt at lægge en anden Linie gjennem A og B af den opgivne Længde, som dannede et Areal større end (A), fik man, ved at tilføje Arealet (B), en Figur med samme Omkreds og større Areal end Cirklen, men det er umuligt, saa at den søgte Linie bliver en Cirkelbue.

I Lobatchewskys Geometri bliver en Cirkel med uendelig stor Radius ikke en ret Linie, men en saakaldet Grænselinie, og naar den opgivne Linies Længde er mindre end Længden af en Grænseliniebue fra A til B, kan der gjennem A og B ikke lægges nogen Cirkelbue af den givne Længde. Hvilken Linie, der da danner Maximumsfiguren, maa særskilt undersøges.

Lad C, P og D være 3 vilkaarlige Punkter af den søgte Linie gjennem A og B, og lad Normalerne til den være CC_1 PP_1 og DD_1.

Da maa man have $\angle C_1CP = \angle CPP_1$; i modsat Fald fik man, ved at lægge Buen CP om, en ukonvex Linie, som med AB skulde danne Maximum af Areal, hvilket er umuligt. (Man ser, at man ikke kan benytte Punktet A, men derimod lade C nærme sig A saa meget, man selv vil). Paa samme Maade faar man $\angle P_1PD = \angle PDD_1$ og $\angle C_1CD = \angle CDD_1$. Saafremt nu CC_1 skjærer DD_1 i et endeligt Punkt O, bliver $OC = OP = OD$, saa at den søgte Linie er en Cirkelbue, fjerner O sig i det uendelige, faar man som Grændsetilfælde, at den søgte Linie bliver en Grænseliniebue. Naar derimod CC_1 ikke skjærer DD_1 i noget endelig eller uendelig fjernt Punkt, ville de vinkelrette paa Midten af Siderne i Trekant CPD heller ikke skjære hinanden, og de have da en fælles Normal (se f. Ex. dette Tidsskrift 5 R. 3 Aarg. Side 130); lad C_1, P_1 og D_1 være de Punkter, hvori denne skjærer CC_1, PP_1 og DD_1. Man faar da:

$$\angle CC_1P_1 = \angle PP_1C_1; \quad \angle PP_1D_1 = \angle DD_1P_1;$$
$$CC_1D_1 = \angle DD_1C_1,$$ hvoraf følger, at alle de nævnte Vinkler ere rette, og da

$$CC_1 = PP_1 = DD_1,$$

bliver det geometriske Sted for C en Linie med konstant Afstand fra C_1D_1.

Man opfatter undertiden Grænselinier og Linier med konstant Afstand fra en ret Linie som Cirkler; det kan gjøres analytisk, og de faa da henholdsvis uendelig store og imaginære Radier, men det kan ogsaa gjøres rent geometrisk, idet Vinkelspidsen C af en Trekant ABC siges at beskrive en Cirkel, naar A og B ligge fast og

$$\angle A + \angle B - \angle C$$

er konstant

Ved denne Opfattelse bliver Maximumslinien i alle Tilfælde en Cirkelbue.

4. En i en Cirkel indskreven n-Kant har større Areal end enhver anden n-Kant med de samme Sider.

Lad (A) være Arealet af en i en Cirkel indskreven n-Kant, (B) Arealet af en anden n-Kant med de samme Sider. De Segmenter, som de n-1 mindste Sider afskjære af Cirklen, afsættes paa de tilsvarende Sider af den anden Polygon. Idet de tilføjede Segmenter have Areal (C), faar man, ifølge Sætningen i 3

$$(A) + (C) > (B) + (C),$$

hvoraf Sætningen følger.

Det kan bemærkes, at Cirkel ogsaa kan tages i den i 3 udvidede Betydning.

5. Blandt n-Kanterne med givne Sider i given Orden er der en og kun en, som er indskreven i en Cirkel.

Cirkel maa i Lobatchewskys Geometri tages i den udvidede Betydning, og det er ogsaa for denne Geometris Vedkommende, at Sætningen her skal bevises. I den sædvanlige Geometri er Sætningen vel bekjendt. (Ramus: Elementær Geometri Pag. 135).

I en vilkaarlig Cirkel afsættes de givne Sider som Korder lig AB, BC, $CD \ldots MN$, hvor CD er den største Korde, og Cirklen er valgt saa stor, at Korderne ikke skjære hinanden. Centrum O vil være beliggende paa den vinkelrette paa Midten (M) af CD,

og det antages, at O falder til samme Side af CD som Punktet A. Idet CD holdes fast, og Kordernes Længder forblive uforandrede, formindskes Radius i Cirklen; skulde herved N falde i A, faar man en indskreven n-Kant, i modsat Fald kommer man omsider til en Cirkel med CD til Diameter, og nu kan Radius i Cirklen ikke formindskes mere. Man lader da Radius i Cirklen atter voxe, idet kun O, som er faldet i M, bevæger sig videre hen ad OM paa modsat Side af CD som A. Nu voxer Cirklens Radius kontinuert, og er ikke forinden N faldet i A, naar man til en Grænselinie gjennem C og D. Dennes Normaler ere alle vinkelrette paa en uendelig fjern ret Linie, og den kan altsaa opfattes som en Linie med konstant Afstand fra den uendelig fjerne rette Linie, og kan, ved at man lader den uendelig fjerne Linie rykke nærmere, kontinuerlig gaa over til Linier med konstant Afstand fra rette Linier, som ere normale paa MO. Paa denne Maade kommer man kontinuerlig over til Korden CD, og ser altsaa, at naar man ikke tidligere har faaet en Polygon indskreven i en Cirkel, maa CD være større eller lig Summen af de $n-1$ andre Sider. Det vil sige, saafremt der overhovedet kan dannes nogen Polygon af de n Sider, vil der ogsaa kunne dannes en i en Cirkel indskrivelig Polygon af de samme Sider.

Kunde der dannes 2 forskjellige Polygoner, indskrevne i Cirkler, fik man ved samme Bevis, som er anvendt i 4., at hver af Polygonerne havde større Areal end den anden, men dette er umuligt.

6. Af alle Trekanter med en given Side og given Sum af de to andre er den største ligebenet.

Lad ABC og ABD have AB fælles og $AC + CB = AD + DB$; idet nu $AC = CB$ og $AD > DB$, skulle vi bevise, at $\triangle ACB > \triangle ADB$.

Idet AD skjærer BC i O, faar man $AO > OB$, da $\angle OBA > \angle OAB$; OB afsættes lig OE henad OA, hvorved altsaa E falder i Liniestykket OA. Afsættes OD lig OF udad OC, kan nu bevises, at F falder inden for eller i C. Faldt nemlig F uden for C, fik man af

$$CF + FE + EA > CA,$$

da $CF = OD - OC$; $FE = DB$ og $EA = OA - OB$,

$$OD + DB + OA > OC + OB + CA,$$

hvilket strider mod det givne:

$$BD + DA = BC + CA,$$

saa at altsaa F falder i Liniestykket OC. Heraf følger

$$\triangle\, COA > \triangle\, EOF = \triangle\, DOB,$$

saa at man ved Addition af $\triangle\, AOB$ faar

$$\triangle\, ACB > \triangle\, ADB,$$

hvilket skulde bevises.

Dette Bevis er angivet af Legendre for sfæriske Trekanter.

7. Af det foregaaende kan nu udledes, at den største af alle n-Kanter med given Omkreds dels maa have alle sine Sider lige store, dels maa kunne indskrives i en Cirkel (som maa være en egentlig Cirkel, da man kun kan faa uegentlige Cirkler, naar den ene Side er størst), saa at den største n-Kant med given Omkreds er regulær.

8. En regulær n-Kant har større Areal end en regulær $n-1$ Kant med samme Omkreds, da den sidste kan opfattes som en n-Kant, i hvilken 2 Sider falde i hinandens Forlængelse.

OM SAMLINGEN AF DE LINIER, HVORAF EN GIVEN KUGLE AFSKJÆRER KORDER, SOM SES UNDER RET VINKEL FRA ET GIVET PUNKT.

(AF C. JUEL.)

Til de Hoveddannelser, hvormed Geometrien altid har beskæftiget sig nemlig Linier og Flader, har man i den nyere Tid føjet adskillige, af hvilke især Liniesamlingerne allerede nu spille en stor Rolle. Disse ere alle kontinuerlige Samlinger ɔ: saadanne, hvis Elementer, der jo her ere Linier, kunne vælges saa nær ved

hinanden, som man selv vil, men de kunne i øvrigt have forskjellig Mægtighed. En Samling, der i Almindelighed sender et endeligt Antal Linier gjennem et givet Punkt og lægger et endeligt Antal i en Plan, kaldes en Liniekongruens, medens en Samling, der sender uendelig mange Linier dannende en Kegle gjennem et givet Punkt og i Overensstemmelse dermed i en Plan lægger uendelig mange Linier, indhyllede af en Kurve, kaldes et Liniekomplex.

Saa simpel end Opfattelsen af saadanne geometriske Tings Existens maa synes, saa snart man blot har set et enkelt Exempel derpaa, har der dog været Tider, hvor man ikke ret har kunnet klare sig Existensen af andre Liniekomplexer end dem, der dannes af Tangenterne til en Flade. Et fremtrædende Exempel derpaa findes i Steiners „Systematische Entwickelung der geometrischen Gestalten von einander", et af de Værker, der have grundlagt den projektive Geometri. Steiner spørger der om den Flade, som indhylles af Linier, som skjære fire givne Planer i fire Punkter med et givet Dobbeltforhold. Det ses her let, at Indhyllingskurven for de i en Plan liggende Linier er et Keglesnit, og at de Linier, der gaa gjennem et givet Punkt, danne en Keglesnitskegle. Deraf kan man imidlertid ikke, som Steiner (1832) aabenbart har gjort, slutte, at Linierne berøre en Keglesnitsflade; de danne netop, hvad man nu kalder et kvadratisk Komplex, hvor de ovennævnte Dannelser, Komplexkurven i en vilkaarlig Plan, og Komplexkeglen med Toppunkt i et vilkaarligt Punkt, ere af anden Orden, men de berøre ikke alle nogen fast Flade.

Idet jeg her skal give et elementært Exempel paa et simpelt Liniekomplex, bemærkes, at det dog ikke er det simpleste, der findes, idet det er kvadratisk, medens de simpleste ere de lineære, hvor de gjennem et Punkt gaaende Komplexlinier danne en Plan; Hovedsætningerne om dette Komplex ere fremstillede i Prof. Petersens Kinematik, tredje Kapitel. Der optræde imidlertid ikke de til et Komplex hørende singulære Dannelser (hvorom nedenfor), hvis Bestemmelse er et væsentligt Punkt i den almindelige Theori, medens disse ved vort Exempel blive tilstrækkelig simple uden dog

at udarte saameget som ved det før nævnte hos Steiner, hvor den til Komplexet hørende singulære Flade dannes af et Tetraeders Sideplaner (og Hjørnespidser).

Det Komplex, der her skal betragtes, er bestemt ved en Kugle (C) med Centrum C og et Punkt A og dannes af de Linier, hvoraf Kuglen afskjærer Korder, der fra A ses under ret Vinkel. Nedfældes fra A paa en af Linierne l, som skjærer Kuglen i M og N, den vinkelrette AA_1, haves $AA_1^2 = - A_1M . A_1N$. Opfattes A som Centrum for en uendelig lille Kugle, bliver A_1 et Punkt, hvis Potenser med Hensyn til denne Kugle og med Hensyn til den givne staa i Forholdet $-1:1$; det geometriske Sted for A_1 bliver derfor selv en Kugle, hvis Centrum O deler Centerlinien CA i samme Forhold d. v. s. er Midtpunkt af AC.

Nu er det let at bestemme de Komplexlinier, der ligge i en given Plan π. Lad denne skjære den sidstnævnte Kugle, som vi ville kalde (O), i en Cirkel k, og lad Projektionen af A paa Planen være A_2; Projektionen af A_2 paa l maa falde sammen med Projektionen af A paa l, d. v. s. l vil indhylles af et Keglesnit, hvis ene Brændpunkt er A_2, medens k er det geometriske Sted for A's Projektion paa Tangenterne. Projektionen af O paa π bliver Kurvens Centrum; da O er Midtpunktet af AC, vil Projektionen af C blive det andet Brændpunkt. Man faar altsaa:
Komplexkurven i en vilkaarlig Plan er et Keglesnit, hvis Brændpunkter ere Projektionerne af det givne Punkt og af den givne Kugles Centrum.

Naar Planen ikke skjærer (O), bliver Komplexkurven imaginær.

Lige saa let bestemmes Komplexkeglen med Toppunkt i et vilkaarligt Punkt P af Rummet. Det geometriske Sted for Projektionen af Punktet A paa alle de gjennem P gaaende Linier er nemlig en Kugle over AP som Diameter, og denne skjærer (O) i en Cirkel — hvis Plan er vinkelret paa CP — der bliver en Ledekurve for den søgte Kegle. Man kan her ogsaa søge det geometriske Sted for Midtpunktet S af de i den givne Kugle af Komplexlinier afskaarne Korder MN. Man har da $SA^2 = SM^2 = - SM . SN$; det geometriske Sted for S bliver altsaa atter

Kuglen (O), og denne skjærer en Kugle over CP som Diameter i en Cirkel, som bliver en anden Ledekurve for den søgte Kegle. Idet de Linier gjennem Toppunktet af en Keglesnitskegle, der staa vinkelret paa Cirkelsnitsplaner, kaldes Keglens Brændlinier, haves: Komplexkeglen for et vilkaarligt Punkt er en Keglesnitskegle, hvis Brændlinier forbinde Toppunktet med det givne Punkt og med den givne Kugles Centrum.

Vi ville nu spørge om det geometriske Sted for de Punkter, hvis Komplexkegler udarte i Planpar; den Flade, som herved findes, kaldes Komplexets Singularitetsflade.

Komplexkeglen til et Punkt P udarter nu i to Planer enten derved, at de to Kugler, den ene over AP som Diameter, den anden Kuglen (O), berøre hinanden, eller derved at P ligger i samme Plan som de to nævnte Kuglers Skjæringslinie; man kan nemlig nøjes med at betragte den første af de før nævnte Ledekurver for en Komplexkegle.

Det geometriske Sted for Centrum af en Kugle, der gaar gjennem et fast Punkt A og berører en fast Kugle (O) i et Punkt R, er en Omdrejningsellipsoide eller Omdrejningshyperboloide, for hvilken A og O ere Brændpunkter; multipliceres denne med 2 med Hensyn til A faas en Del af Singularitetsfladen, og den eneste, for hvis Punkter Komplexkeglen kan udarte i to konjugert imaginære Planer.

De to Kugler skjære hinanden i dette Tilfælde egentlig i to imaginære rette Linier m og n, og Forbindelsesplanerne $(Pm$ og (Pn), hvori P's Komplexkegle udarter, blive (imaginære) Tangentplaner til Kuglen (O). Disse to Planers Skjæringslinie er Forbindelseslinien mellem P og Røringspunktet R.

Svarende til den anden af de ovennævnte Muligheder for udartet Komplexkegle, maa P, der altid ligger paa Kuglen over AP som Diameter, ogsaa ligge paa (O), hvilken Betingelse baade er tilstrækkelig og nødvendig. Det er let at finde Indhyllingsfladen for de Planer, hvori Komplexkeglerne for Punkter af (O) udarte. Da Ledekurverne til Komplexkeglen for et almindeligt Punkt P nemlig ere vinkelrette paa AP og CP, maa de ogsaa

være dét her, og Indhyllingsfladen for Planer gjennem P og vinkelrette paa AP og CP bliver, idet P gjennemløber Kuglen (O), netop den til Singularitetsfladen hørende Ellipsoide. eller Hyperboloide.

Kanten for en af disse udartede Kegler vil berøre (O) og staar vinkelret paa Planen gjennem A, C og P.

Singularitetsfladen Σ for Komplexet dannes af en Omdrejningsellipsoide eller Omdrejningshyperboloide (E) med Brændpunkterne A og C paa Drejningsaxen og af en Kugle (O) over dens store Axe som Diameter.

Her have vi opfattet Singularitetsfladen som et geometrisk Sted for Punkter; selve Udviklingen viser imidlertid, at den samme Flade bliver Indhyllingsfladen for de Planer, hvori der findes Komplexkurver, der opfattede som Indhyllingskurver udarte i to Punkter. Naar nemlig Komplexkeglen for et Punkt P opløser sig i to Planer π og π_1, ville alle de Linier i π, der gaa gjennem P være Komplexlinier; Komplexkurven i π vil derfor opløse sig i et Punktpar. Er omvendt π en Plan, hvis Komplexkurve udarter i to Punkter P og P_1, maa π være den ene af de to Planer, hvori P's Komplexkurve udarter. Man faar derfor alle de Planer med, hvori der findes udartede Komplexkurver, ved at medtage alle de Planer, hvori alle Komplexkegler kunne udarte. Det foregaaende viser altsaa, at alle Tangentplanerne til (O) og til (E) og ikke andre ville være de Planer, hvori der findes udartede Komplexkurver.[1])

Det er Plücker, som først fra et almindeligt geometrisk Standpunkt har udviklet Læren om Liniekomplexer, og han har bevist, at den her nævnte dobbelte Frembringelse af Singularitetsfladen gjælder for alle kvadratiske Komplexer[2]).

Til et Komplex knytter sig altid en særlig Liniekongruens dannet af Komplexets singulære Linier. En singulær Linie kan

---

[1]) Et direkte Bevis for ovenstaaende Sætning er udeladt for Korthedens Skyld; det bygges lettest paa nogle Sætninger, jeg har fremsat i en tidligere Artikel her i Tidsskriftet (1886 S. 33).

[2]) Senere har Pasch bemærket, at en analog Sætning gjælder for alle analytiske Komplexer, Crelles Journ. Bd. 76.

her defineres som Skjæringslinien mellem de to Planer, hvori en Komplexkegle kan udarte. Ligger et Punkt P paa Fladen (E), ville de to Planer, hvori P's Komplexkegle udarter, efter det foregaaende skjære hinanden i en Linie, der berører (E) og skjærer Linien AC, der maa være en Symmetriaxe for Komplexet. Ligger P derimod paa Kuglen (O), vil den gjennem P gaaende singulære Linie berøre Kuglen og staa vinkelret paa AC, ɔ:
De singulære Linier i Komplexet dannes af de Tangenter til Fladen (E), der skjære Symmetriaxen, og de Tangenter til Kuglen (O), der staa vinkelret paa samme Linie.

Man ser her, hvad der i Almindelighed vil være Tilfældet, at enhver singulær Linie er Tangent til Singularitetsfladen. Dens Røringspunkt med denne kaldes Liniens singulære Punkt, og Tangentplanen i dette Punkt Liniens singulære Plan.

Lad s være en singulær Linie, f. Ex. af dem, der skjære Symmetriaxen, og lad den skjære Kuglen (O) i M og M'. For hvert af disse Punkter udarter Komplexkeglen i to Planer, der berøre (E); men de to Planpar have den ene Plan fælles, nemlig den, der berører (E) i det singulære Punkt S af s, og Komplexkurven i denne Plan udarter i Punktparret MM'; dette følger umiddelbart af den S. 44 nederst givne Bestemmelse af udartede Komplexkegler. Da det selv samme kan gjøres gjældende for en singulær Linie, der berører (O), ser man altsaa, at de singulære Linier ere ogsaa Forbindelseslinier mellem to saadanne Punkter, hvori en Komplexkurve kan udarte.

Lad atter s være en af de singulære Linier, der skjærer Symmetriaxen og altsaa berører Fladen (E) i et Punkt S. Man kan da bevise, at Komplexkurven i en vilkaarlig Plan gjennem s vil berøre s i S. Brændpunkterne for Kurven blive nemlig som før nævnt Projektionerne A_2 og C_2 af A og C paa π. Da A og C ere Brændpunkterne for Keglesnitsfladen, danne SA og SC lige store Vinkler med s. Projektionerne SA_2 og SC_2 ville derfor ogsaa danne ligestore Vinkler med s, d. e. S er Røringspunktet mellem s og et Keglesnit, der har A_2 og C_2 til Brændpunkter.

Er s_1 en singulær Linie, der berører (O) i et Punkt S_1 og staar vinkelret paa Symmetriaxen, gjælder samme Sætning, thi paa Grund af Symmetrien vil s_1 være Axen og S_1 altsaa Toppunktet for Komplexkurven i en vilkaarlig Plan gjennem s_1, hvilken da berører s_1 i S_1.

Idet den analoge Sætning om Komplexkegler bevises paa analog Maade ved Benyttelse af Sætningerne om en Kegles Brændstraaler, haves:

Komplexkurven i enhver Plan gjennem en singulær Linie berører denne i et fast Punkt (det singulære Punkt), og Komplexkeglen for hvert Punkt af Linien berøres langs denne af en fast Plan (den singulære Plan).

For at Sætningen skal være almengyldig, maa man dog her betragte enhver Plan gjennem to Planers Skjæringslinie som en Tangentplan til den af de to første sammensatte Kegle — og analogt ved en udartet Kurve.

En saadan Sætning gjælder udelukkende for de singulære Linier. Naar man betragter Komplexkeglerne til Punkter af en vilkaarlig Komplexlinie, haves:

Naar et Punkt P bevæger sig henad en vilkaarlig Komplexlinie, ville Tangentplanerne langs denne til de forskjellige til P hørende Komplexkegler danne et med Rækken af Punkter projektivt Planbundt.

Bevæger P sig henad Komplexlinien l, vil Kuglen over AP som Diameter skjære (O) i en Cirkel k, hvis Plan π' er vinkelret paa AP og for alle Stillinger af P gaar gjennem et fast Skjæringspunkt M mellem l og (O).

Tangenten p i Punktet M til k er Skjæringslinien mellem π' og Tangentplanen til (O) i M, og Planen π, der forbinder p med P, bliver den omhandlede Tangentplan til P's Komplexkegle. Man har altsaa

(P) *pr.* C (P) *pr.* (π') *pr.* (p) *pr.* (π), hvorved Sætningen er bevist.

Vi ville nu ikke gaa videre i Undersøgelsen, men blot endnu løse den Opgave at finde det Punkt og den Kugle, der paa den

i det foregaaende nævnte Maade bestemme Komplexet, idet dette tænkes forelagt. Med Komplexet er Singularitetsfladen given, altsaa ogsaa Kuglen *(O)*, som er geometrisk Sted for Projektionen af et vist fast Punkt A paa Komplexets Linier. Men naar Projektionen af A paa en Komplexlinie l er A_1, og Linien anden Gang skjærer *(O)* i C_1, gaar Planen vinkelret paa Midten af $A_1 C_1$ gjennem 0; en Plan vinkelret paa l i C_1 maa da gaa gjennem et andet fast Punkt C, der ligger saaledes, at O er Midtpunktet af AC, d. e. CA er Projektionen af C paa l. Heraf følger øjensynlig, at de Linier, der af en Kugle med Centrum C afskjære Korder, der fra et Punkt A ses under ret Vinkel, ville ogsaa af en anden lige saa stor Kugle med Centrum A afskjære Korder, der fra C ses under ret Vinkel.

Heri haves Forklaringen paa, at A og C i de tidligere Sætninger indgik paa en fuldstændig symmetrisk Maade.

DØDSANMELDELSE.

Hans Carl Frederik Christian Schjellerup

var født i Odense den 8de Februar 1827. Efter i sine Drengeaar at have nydt Undervisning i en derværende Borgerskole kom han i Urmagerlære. Medens han var i Lære, udtænkte han en Konstruktion af et perpetuum mobile. Da H. C. Ørsted i 1845 opholdt sig i Odense, henvendte S. sig til ham og forelagde ham sin Opfindelse. Han gjorde et saa gunstigt Indtryk paa Ørsted, at denne foranledigede, at S. blev privat forberedt til Præliminærexamen. Efter at S. var bleven Urmagersvend, rejste han til Kjøbenhavn og studerede ved den polytekniske Læreanstalt i Aarene 1848—50, hvorefter han afsluttede sine Studier ved Anstalten med den fuldstændige Examen i Mekanik.

I Aaret 1851 blev han udnævnt til Observator ved Observatoriet paa Rundetaarn. Observatoriet blev dengang ledet af Professor Olufsen. I de Aar, S. var Observator under Olufsen, udfoldede han en betydelig Virksomhed som Beregner. De paa-

gjældende Bind af „Astronomische Nachrichten" bære noksom Vidnesbyrd derom.

Et af hans Arbejder, der handlede om en Banebestemmelse for en Komet, Tycho Brahe havde iagttaget 1580, skaffede ham Doktorgraden fra Universitetet i Jena.

Ved Olufsens Død var S. selvskreven til at blive Professor ved Universitetet. Han fik imidlertid ikke Pladsen, fordi man mente, han savnede den klassiske Dannelse. Et Forsøg, han gjorde paa at tage Studenterexamen, opgav han selv igjen, idet han troede at mærke Modvilje fra Examinatorernes Side. Det smertede S. dybt, at han ikke blev anset for værdig til at være Professor, fordi han manglede den klassiske Dannelse, og ca. 20 Aar efter skriver han herom i Anledning af sin Oversættelse af Al-Sufi, som udkom 1874:

„Frugterne paa dette Træ blive først plukkede efter Professoratets Besættelse ..... Ved ovennævnte Bog*) er mit Standpunkt blevet klart for enhver. Læseren er tvungen til at indrømme mig en Plads i de klassisk dannedes Række .... jeg har offentlig vist, at hvad Skjæbnen har forhindret mig i at erhverve før mit 20de Aar, har jeg erhvervet og benyttet efter mit 30te."

Naar man erindrer, at S. er født 1827, at hans 30te Aar er Aaret 1857, det Aar da d'Arrest blev udnævnt til Professor, vil man se, hvilken stor Indflydelse den Omstændighed, at han blev forbigaaet i 1857, har udøvet paa hans astronomiske Virksomhed.

I 1859 paabegyndte S. i Forening med Dr. Tychsen Udgivelsen af „Mathematisk Tidsskrift." Han fratraadte imidlertid Redaktionen efter et Aars Forløb.

Da det nye Observatorium var færdigt i 1861, fik S. Lejlighed til at udføre mere omfattende Observationsrækker, end det var muligt paa Rundetaarn.

Han fik her paa det nye Observatorium en fortrinlig Meridiankikkert til sin Raadighed, og han paabegyndte nu en Række

---

*) Al-Sufi, et stort arabisk Værk fra Middelalderen.

Zoneobservationer af Stjerner imellem + 15° og — 15° Deklination.

I 1862 lykkedes det S. at opdage en Komet, der imidlertid var bleven set noget tidligere i Cambridge (U. S.) I Løbet af 3 Aar fik S. uden nogen fremmed Hjælp observeret 10,000 Stjerner og reduceret disse Observationer, saa at Kataloget var færdigt til Trykken en Maaned efter, at den sidste Observation var udført.

S's Katalog vakte stor Opsigt i den astronomiske Verden. Man erkjendte hurtig, at her forelaa et sjælden godt Arbejde.

Fra Pulkova udgik der nogle Aar senere et Arbejde, der tilfulde viser, hvor stor Pris man der satte paa dette Katalog. Dette Arbejde, Nyréns Bestemmelse af Præcessionskonstanten ved Sammenligning mellem Schiellerups og Bessels Zoner, viste, at Spørgsmaalet om Præcessionskonstanten langtfra var løst ved Bessels og Struves Undersøgelser, men at der stadig her laa et stort aabent Spørgsmaal. Senere forsøgte Dr. Dreyer at klare Sagen ved en anden Benyttelse af de teleskopiske Stjerner. Han benyttede hertil S.'s Katalog, som han sammenlignede med Lalandes.

Umiddelbart efter Fuldendelsen af det første Katalog paabegyndte S. et andet, hvortil han kun naaede at observere ca. 750 Stjerner, da andre astronomiske Arbejder fik ham til at opgive dette Foretagende.

I 1865 blev der udført en Længdebestemmelse mellem Christiania, Kjøbenhavn og Stockholm. S. var den danske Iagttager. Medens han opholdt sig i Stockholm for at bestemme den personlige Ligning, blev han udnævnt til titulær Professor. Paa denne Titel satte han stor Pris — ikke for Titlens egen Skyld men paa Grund af den Motivering, som d'Arrest lod følge med sin Indstilling til Udnævnelsen.

Beregningen af Længdebestemmelsen blev aldrig færdig. Efter at den danske og den norske Iagttager havde fuldført deres Del af Beregningerne, blev det hele overgivet den svenske Deltager til videre Bearbejdelse og Publikation. Dette sidste skete imidlertid aldrig.

Samtidig med Længdebestemmelsen udførte S. et andet astronomisk Arbejde.

I Astronomische Nachrichten fandtes en værdifuld Skat i de mange spredte Fixstjerneobservationer, der vare publicerede deri. Disse Iagttagelser vare saa godt som aldeles utilgængelige for Astronomerne paa Grund af, at de fandtes snart her snart der i de forskjellige Bind. Man havde gjort to Forsøg paa at samle disse.

Det første var gjort i 1850 fra Wiener Observatoriet, hvor Littrow besluttede at samle Observationerne fra de første 32 Bind. Dette Arbejde, hvis Maal var at give nøjagtige Positioner, strandede netop paa selve sit Maal. I 1860 paabegyndte Hoeck i Utrecht med Assistance af Dibbits og to andre yngre Astronomer det samme Arbejde. Der blev dengang arbejdet „mit grosser Ausdauer und grossem Eifer“ paa at faa det færdigt. Det lykkedes ikke. Planen var for stor, og Arbejdet blev henlagt. Først i 1885 naaede Dr. Kam efter 13 Aars ihærdigt Arbejde at gjøre Hoecks og Dibbits Arbejder færdige. S., som klart saa, at Aarsagen til, at de første Foretagender vare mislykkede, var en fejl Plan, besluttede sig til at give en brugbar Nøgle til Iagttagelserne og det ikke til Meridianobservationerne alene, som hans Forgængere havde tænkt, men til samtlige Stjernepositioner i de første 66 Bind af Nachrichten. Idet S. saaledes udvidede Arbejdet i en Retning og formindskede det i en anden, naaede han i to Aar at faa udført, hvad der var mislykket for de andre, og i 1867 udkom: „Genäherte Oerter der Fixsternen,“ hvorved Astronomien blev beriget med 7000 Observationer.

Under Udarbejdelsen af sit Stjernekatalog var S. bleven opmærksom paa Spørgsmaalet om Stjernernes Farver. Sine og andres Resultater samlede han i „Catalog der rothen isolirten Sternen,“ et Katalog, der ved Spektralanalysens Indførelse i Astronomien fik en ikke ringe Betydning. Hvis Secchi ikke havde haft dette Katalog, havde han næppe nogensinde fundet sin IV. Type af Stjernespektrer.

S. havde fortsat sine Sprogstudier og særlig udvalgt sig Chinesisk og Arabisk. Af disse Sprogstudier høstede Astronomien

store Frugter. I 1873 diskuterede han den Nøjagtighed, som kan tillægges de moderne Maanebaneelementer, ved at sammenligne dem med 3 chinesiske Iagttagelser af Formørkelser i Aarene 708, 600 og 508 f. Chr. F.

Næste Aar udkom hans store Arbejde: „Description des étoiles fixés composée par l'astronome Persan Abd-Al-Rahman Al-Sufi." Herved have Nutidens Astronomer for første Gang faaet en nøjagtig Oplysning om, hvilken Lysstyrke Hipparch tillagde hver enkelt Stjerne, samt en fuldstændig Uranometrie fra det 10de Aarhundrede efter Al-Sufis Observationer. Sufis Iagttagelser af Størrelsesklasserne vare saa gode, at de i enhver Henseende kunne stilles ved Siden af Argelanders i „Neue Uranometrie."

Ogsaa en Del af de gamle græske Iagttagelser ere blevne bearbejdede af S. Han undersøgte f. E. en Del af de Maaneobservationer, der findes i Almagest. S. havde paabegyndt Undersøgelser over de Stjernebedækninger, som vare observerede for Planeternes Vedkommende, og som dels ere omtalte i Almagest, dels ere tagne af chinesiske Beretninger. Blandt hans efterladte Papirer findes hans herhen hørende Arbejder. Han har desuden efterladt sig en Del Optegnelser om Astronomiens Historie i Oldtiden, en paabegyndt Undersøgelse om Formørkelserne i Middelalderen, nogle Observationer af Fixstjerner med stærk Egenbevægelse, et Manuskript til et chinesisk-engelsk og chinesisk-fransk Lexikon samt enkelte andre Optegnelser. Foruden de her nævnte Afhandlinger har S. skrevet flere Artikler, der ere spredte i forskjellige Tidsskrifter, samt et populært Værk om Astronomien.

Ved Siden af sin egentlige Virksomhed var S. Lærer ved Søofficersskolen og den polytekniske Læreanstalt. Han var som saadan meget afholdt af sine Elever. Selv om hans stundom satiriske Bemærkninger i Begyndelsen kunde skræmme en eller anden, opdagede dog Vedkommende snart ved nærmere Bekjendtskab, at der bag denne Optræden laa en god Vilje til at hjælpe enhver.

S. opnaaede ved sine astronomiske Arbejder stor Anseelse. Hans Værker skaffede ham flere Tilbud om Pladser i Udlandet, hvilke han dog afslog.

Et Tilbud om at blive Professor d'Arrest's Eftermand saa han sig nødsaget til at afslaa af pekuniære Grunde.

Til det sidste til kort før sin Død,. som indtraf den 13de Nov. 1887, vedblev S. at sysle med sine astronomiske Arbejder. Selv da han var saa svag, at han ikke formaaede at hente sine Arbejder frem, lod han de. tilstedeværende tage dem ned fra Reolen for at forklare dem, hvad Arbejde, det var, der laa.

Hans Død vil efterlade et stort Savn blandt Astronomerne. Med ham tabtes det store Kendskab til de østerlandske Folks Iagttagelser — et Kendskab, der havde sin dobbelte Værdi ved at han paa en Gang var en dygtig Sprogforsker og Astronom ex professo.

Ligesom d'Arrest kunde rose sig af, at han var en af de faa Astronomer af den gamle Skole, der tilfulde havde formaaet at sætte sig ind i den moderne Videnskab Spektralanalysen, kunde S. rose sig af, at han var en af de meget faa Astronomer, der selv var i Stand til at tyde de gamle astronomiske Iagttagelser fra Astronomiens Moderland Asien. Dog sligt laa langt fra ham. Han hørte ikke til dem, der udbasunede deres egen Ros. Han udførte sine betydelige Arbejder i det stille.

V. Hjort.

LØSNING AF NOGLE KONSTRUKTIONSOPGAVER.

(AF A. S. BANG.)

1. Anden Løsning af Opgave 490:

En Firkant med givne Sider er omskrivelig om en Cirkel. Naar den ene Side lægges fast, hvilket er da det geometriske Sted for den indskrevne Cirkels Centrum.

Denne Opgave har jeg løst Side 155 i 5. Række 3. Aargang, og fandt, at det geometriske Sted er en Cirkel med Centrum i den faste Linie, men da Løsningen ikke blev angivet ved elementære Midler, skal der nu meddeles en fuldstændig elementær Løsning af Opgaven.

En vilkaarlig af Firkantens Stillinger er $ABCD$, hvor BC ligger fast, og O er den indskrevne Cirkels Centrum. Linien AD drejes om O, til den falder henad BC, hvorved A kommer i A_1, D i D_1, og da er $\angle A_1OD_1 + \angle BOC = 2R$.

Gjennem B trækkes en Parallel med OA_1 og gjennem C en Parallel med OD_1, og Parallelernes Skjæringspunkt kaldes P. OP skjærer BC i R.

Da $A_1B = AB$ og $CD_1 = CD$ ere bekjendte, kunne Punkterne A_1 og D_1 afsættes, hvorefter R bestemmes af

$$RC:RD_1 = BC:A_1D_1.$$

Nu er
$$OR:RP = RD_1:RC$$
og
$$OR.RP = RB.RC;$$
den sidste Ligning følger af, at Firkanten $BOPC$ er indskrivelig i en Cirkel.

Man faar da

$$\overline{OR}^2 = RD_1.RB = RA_1.RC$$

saa at OR er konstant. Det geometriske Sted for O bliver følgelig en Cirkel med Centrum i R.

Den sidste Ligning viser, at naar gjennem BD_1 og A_1C lægges vilkaarlige Cirkler, ville disses Fælleskorder gaa gjennem R, hvilken Konstruktion at R man ogsaa finder ved, som i den tidligere meddelte Løsning, at betragte R som Centrum for en Involution bestemt ved Punktparrene BD_1 og CA_1.

2. E n o m s k r i v e l i g F i r k a n t s k a l k o n s t r u e r e s af de S t y k k e r, h v o r i R ø r i n g s p u n k t e r n e d e l e S i d e r n e.

Lægges den ene Side fast, faar man som geometriske Steder for Centrum dels en vinkelret paa denne Side, dels den i 1. fundne Cirkel.

O m e n g i v e n C i r k e l s k a l o m s k r i v e s e n F i r k a n t m e d g i v n e S i d e r.

Lægges den ene Side fast, faar man Centrum bestemt som Skjæringspunkt mellem en Cirkel og en Parallel med Siden i en Afstand fra denne lig den givne Cirkels Radius.

3. Den første Opgave i 2 kan udvides til følgende Opgave: $ABCD$ e r e n F i r k a n t, h v i s m o d s t a a e n d e S i d e r BC

og AD skjære hinanden i O. Firkanten skal konstrueres af Siderne og Differensen mellem OA og OB.

AD drejes om Halveringslinien af Vinklen AOB, saa at A og D falde i A_1 og D_1; AB og CD skjære Halveringslinien i henholdsvis P og Q.

Punkterne B, A_1, D_1 og C kunne afsættes, da man kjender deres indbyrdes Afstande, og da $A_1P + PB$ og $CQ + QD_1$ ere bekjendte, faar man som geometriske Steder for P og Q Ellipser med deres store Axer paa BC, og OP bliver Fællestangent til disse Ellipser. Konstrueres denne Fællestangent (som f. Ex. angivet i 4), vil Opgaven derved være løst.

4. Konstruktion af Fællestangenten til 2 Ellipser, naar en Axe i hver af disse falde i hinandens Forlængelse.

Ved at betragte den ene af Ellipserne som Projektion af en Cirkel, reduceres Opgaven til den, at konstruere Fællestangenten til en Ellipse og en Cirkel med Centrum paa en af dens Axer, og ved passende Valg kan den altid reduceres til det Tilfælde, hvor Cirklen har sit Centrum paa den store Axe.

Lad nu Cirklen have Centrum C, Ellipsen Brændpunkterne A og B. Ere da C_1 og B_1 Punkterne C og B's symmetriske Punkter med Hensyn til Fællestangenten, kan Firkanten AB_1C_1C konstrueres af Siderne, da $\angle C = \angle C_1$. Se Løsning af Opgave 466, Side 31 i 5. Række, 3. Aarg. Er Firkanten konstrueret, er derved ogsaa Fællestangenten bestemt.

LØSNING AF OPGAVE 550.

550. I en Plan er givet n Punkter. Igjennem 3 og 3 af disse læggesCirkler. Det antages, at hver to af disse skjære hinanden. Hvor mange Skjæringspunkter er der, som ikke falde sammen med de givne Punkter.

(H. Valentiner).

Lad os foreløbig antage, at $n > 6$, og lad os kalde de n givne Punkter for Grundpunkter. Dersom to Cirkler have to

Grundpunkter fælles, ere disse deres Skjæringspunkter, og saadanne Cirkler komme derfor ikke i Betragtning i Opgaven. Vi ville først betragte Cirkler, der ingen Grundpunkter have fælles, og derpaa Cirkler, der have et Grundpunkt fælles.

2 Cirkler uden fælles Grundpunkter gaa gjennem 6 Grundpunkter; af saadanne Grupper paa 6 Punkter kunne vi blandt de n Punkter vælge $\frac{[n]}{[6]\,[n\text{-}6]}$. Blandt saadanne 6 udtagne Punkter skal paa alle Maader udtages 2 Grupper paa 3; men de 2 Gruppers Orden er ligegyldig, og Ordenen af de 3 Punkter indenfor hver af de 2 Grupper er ligegyldig. Altsaa faas $\frac{[6]}{2\,.\,[3]\,.\,[3]}$ som Antallet af brugbare Cirkelpar, bestemte ved de 6 Punkter. Da vi paa $\frac{[n]}{[6]\,[n\text{-}6]}$ Maade kunde udtage 6 Punker, faas

$$\frac{[n]}{[6]\,[n\text{-}6]}\cdot\frac{[6]}{2\,.\,[3]\,.\,[3]} = \frac{[n]}{72\,[n\text{-}6]}$$

som Antallet af brugbare Cirkelpar i det hele taget. Da ethvert Cirkelpar bestemmer 2 Skjæringspunkter, faas for Skjæringspunkternes Antal $\frac{[n]}{36\,[n\text{-}6]}$.

3 Cirkler med et fælles Grundpunkt gaa igjennem 5 Grundpunkter Af saadanne Grupper paa 5 Punkter kunne vi udtage $\frac{[n]}{[5]\,[n\text{-}5]}$. Blandt 5 valgte Punkter kan ethvert tages til fælles Grundpunkt, hvilket giver 5 Muligheder. Naar et er valgt til fælles Grundpunkt, skulle vi mellem de andre 4 paa alle Maader udtage 2 Grupper paa 2; men de 2 Gruppers Orden er ligegyldig, og Ordenen af de 2 Punkter indenfor hver af de 2 Grupper er ligegyldig. Altsaa faas for et valgt fælles Grundpunkt $\frac{[4]}{2\,.\,[2]\,.\,[2]} = 3$ brugbare Cirkelpar og i det hele $5\,.\,3 = 15$ brugbare Cirkelpar.

Da man imidlertid paa $\frac{[n]}{[5]\,[n\text{-}5]}$ Maader kunde udtage 5 Punkter, faas af brugbare Cirkelpar i det hele taget $\frac{15\,[n]}{[5]\,[n\text{-}5]} = \frac{[n]}{8\,[n\text{-}5]}$

og da hvert Cirkelpar bestemmer et brugbart Skjæringspunkt, faas det samme Antal Skjæringspunkter.

Lægges dette Antal til det før fundne, faas som Antallet af Skjæringspunkter, forskjellige fra Grundpunkterne

$$\frac{[n]}{36\,[n\text{-}6]} + \frac{[n]}{8\,[n\text{-}5]} = \frac{(9\,n\text{-}4)\,[n]}{72\,[n\text{-}6]}.$$

Værdierne 1, 2, 3, 4 for n ville let ses at falde udenfor Opgaven. $n = 5$ findes let at give 15 og $n = 6$ $20 + 90 = 110$ Skjæringspunkter. *)

(L. Ankjær).

OPGAVER TIL LØSNING.

553. Konstruer en Trekant af den Linie, der deler en Vinkel i 2 Stykker, der forholde sig som 1 : 2, dens Vinkel med den modstaaende Side og Forholdet mellem de Stykker, hvori den deler samme. (A. S. Bang).

554. En Femkant, der kan omskrives om en Cirkel, har Siderne a_1, a_2, a_3, a_4 og a_5. Find Radius til den indskrevne Cirkel, og vis, at Femkanten kan konstrueres af Siderne.

(A. S. Bang).

555. Konstruer en Sexkant, naar man kjender alle Siderne og desuden den Vinkel, som ethvert Par modstaaende Sider danne med hinanden. (L. Ankjær).

556. Hvorledes indses uden direkte Sammentælling i Tabellerne, at

$$(log\ 1{,}01 + log\ 1{,}02 + log\ 1{,}03 + \text{—} \ldots log\ 10{,}00)$$
$$+ \left(10^{0,01} + 10^{0,02} + 10^{0,03} + \ldots 10^{1,00}\right) = 1000{,}01,$$

naar man saavel i Logarithmerne som i Antilogarithmerne kun medtager de to første Decimaler (uden Forhøjelse af 2den Decimal, hvor næste Ciffer er 5 eller derover). (J. P. Gram).

*) Ogsaa løst af Fr. Sodemann.

LITERATUR.

T. C. W. Jessen. Vejledning i Arithmetik for Begyndere. Kbhvn. 1887.

(Anmeldt af S. A. Christensen).

Der er vel næppe noget vanskeligere for en Lærebogsforfatter end at skrive for Begyndere. Derfor se vi ogsaa saa mange mer eller mindre heldige Forsøg derpaa. Den foreliggende Bog er et af disse. Forfatteren har haft den meget heldige Ide gjennem Talexempler at ville lede Eleven ind i Mathematiken, men har ved en altfor gjennemført Anvendelse deraf rent forfejlet Maalet.

Tal er et udmærket Hjælpemiddel, men kun benyttet med Maade, ellers bliver det farligt, saa det ødelægger Elevens Forstaaelse af Mathematiken.

At benytte Talexempler til at vise Eleven Vej hen til Sætningen er udmærket, hvor det kan gjøres; men ikke for alle Sætninger er det heldigt.

Jeg skal her nævne et Exempel, som findes hos Forfatteren. Han forklarer, at en Klamme om nogle Tal betegner, at det, der findes deri, skal regnes for sig. Eleven vil nu forstaa dette saaledes, at gjør han noget andet, saa bærer han sig galt ad. Han vil da sige til sig selv, at $5 + (4 + 3)$ maa ikke udregnes ved $5 + 4 + 3$, men saaledes at $5 + (4 + 3) = 5 + 7$, det bliver derfor højst uheldigt, naar Forfatteren lærer, at $5 + (4 + 3) = 5 + 4 + 3$ er en rigtig Fremgangsmaade.

Dette at opløse Parenteser er noget, som naturligt kun hører hjemme i Bogstavregningerne. Naar Forfatteren saaledes gjennem et Talexempel lærer flerleddede Størrelsers Addition og Subtraktion, er det selvfølgelig utilstrækkeligt at udlede Sætningen alene, hvor den flerleddede Størrelse er en Sum af to Addender. Hvorfra skal Eleven ane, at Sætningen ogsaa gjælder, naar den flerleddede Størrelse er en Differens, eller indeholder flere Led, dog vel ikke deraf, at der som første Anvendelse af Sætningen findes en Differens at subtrahere?

Foruden denne Fare for at anvende Talexemplerne uheldigt, eller rettere urigtigt, findes der en anden Fare ved dem. Man frister derved Eleven til at bevise Rigtigheden af de foreliggende enkelte Exempler og dermed at lade det være tilstrækkeligt. Tilmed gjennemfører Forfatteren dette for hele Bogen, idet han for Bogstaver aldeles ikke berører Muligheden af Bevis. Det bliver ligefrem en Fejl, naar Forfatteren ved Brøkregninger lader Exemplerne føre til hele Tal. Jeg skal oplyse det ved et Par Exempler. $\frac{4+6-8}{2} = \frac{4}{2} + \frac{6}{2} - \frac{8}{2}$ siger Forfatteren, Eleven vilde sige $\frac{4+6-8}{2} = 2 + 3 - 4$, hvorledes skal han saa heraf udlede Sætningen om Brøkers Addition og Subtraktion?

Et andet Exempel er dette $\frac{20 . 12}{4} = \frac{20}{4} . 12 = 20 . \frac{12}{4}$, skreven med Bogstaver siger Forfatteren $\frac{a\,b}{c} = \frac{a}{c} . b = a . \frac{b}{c}$, hvad der er urigtigt, thi $\frac{a}{c}$ skal efter Talexempet blive et helt Tal. Han faar altsaa her kun tilsyneladende Betydningen af en brudden Faktor frem. Desuden kan han her ikke bevise Sætningerne, som her ere nævnte, forudsat at hans Talexempler ikke førte til hele Tal, thi $2 . \frac{4}{2}$, eller $4 . \frac{20}{4}$, eller $m . \frac{a}{m}$ læres først senere at være lig 4, 20 eller a.

Naar Eleven vænnes til, at saadanne Beviser tages for gyldige, vil han staa aldeles stille overfor Bogstavregningerne. Betydningen af Bogstaver vil aldeles ikke gaa op for ham, han vil kun betragte dem som Biting, der ere Mathematiken ligegyldige. Hvorledes skal det gaa ham med Geometrien, vil han ikke ogsaa der overalt indføre Talværdier i Opgaverne?

Foruden denne væsentlige Indvending mod Bogen skal jeg kun endnu nævne Definitionerne paa de forskjellige Regningsarter.

Ved Addition og Subtraktion findes baade Definitionerne, at de ere Tælninger, og den mere moderne. Det er altid uheldigt at give Eleven to Forklaringer, han vil have Vanskelighed ved at

vide, hvilken han skal holde sig til. Desuden er der jo den Fejl ved Definitionen som Tælning i Talrækken, at den kun kan gjælde hele Tal. Divisionen er aldeles ikke defineret, derimod er der for denne givet 3 forskjellige Forklaringer paa Betydningen af 12 : 4. Hvilken skal nu Eleven bruge som almindelig Definition? Det kan ikke være tilstrækkeligt at tilføje efter Exemplet 12 : 4 = 3, at Kvotienten altsaa er det Tal, som multipliceret med Divisor giver Dividenden.

At jeg finder det mindre heldigt at sætte Multiplikator efter Multiplikand, hvilke Navne ikke ere nævnte i Bogen, har mindre Betydning.

Med Hensyn til Afsnittet om Ligninger skal kun bemærkes, at Forfatteren i en Anmærkning taler om, at to Ligninger med to ubekjendte kunne være i Strid, men hvori denne bestaar og Betydningen deraf er ikke nævnt.

En Fordel ved Bogen er den Opgavesamling, som er føjet til den, dog kan jeg her kun sige, at med det, der læres i Bogen, vil det være umuligt for Eleven at benytte denne Samling. I Bogen er Bogstaver en Biting, her ere de eneraadende, og Forfatteren har intet Steds gjennemregnet nogen Opgave med Bogstaver — undtagen i Afsnittet om Ligninger —, Eleven maa derfor mangle enhver Forudsætning for at bruge Samlingen, med mindre han foruden Bogen har lært mere Mathematik, og det kan ikke være Hensigten, at han andet Steds fra skal hente Forudsætninger for at kunne bruge Bogen. Desværre er Samlingen saa vel som selve Bogen temmelig stærkt opfyldt af Trykfejl.

Af dette tror jeg maa fremgaa, at Bogen ikke er egnet for vore højere Skoler, og selv til Borgerskoler og tekniske Skoler tror jeg ikke, at den vil være god, thi Mathematikens Betydning som opdragende Middel ligger i Bevisernes Exakthed, saa Eleven maa hellere lære lidt, naar det blot er korrekt.

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von

Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

INDHOLD.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og **H. G. Zeuthen.**

FEMTE RÆKKE.

Femte Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1887.

SJETTE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Alhambravej 6, Kjøbenhavn, V.

OM ARGANDS BEVIS FOR ALGEBRAENS FUNDAMENTALSÆTNING.

(AF C. JUEL).

I de fleste Lærebøger i Ligningernes Theori findes et Bevis for, at en Ligning af n'te Grad har n reelle eller komplexe Rødder, der nu sædvanligvis tillægges Argand; Cauchy, efter hvem Beviset tidligere hyppigt benævntes, har i Virkeligheden kun gjort ubetydelige Ændringer ved det. Efter at den nyere Funktionslære har eftervist flere Muligheder for Tals indbyrdes Afhængighed, end man tidligere tog Hensyn til, tør det maaske anses for vel bekjendt, at dette Bevis ikke er tilstrækkeligt[1]). Da Bekjendtskabet til Argands omtalte Bevis imidlertid er mere udstrakt end til dets Korrektiv, er det maaske dog ikke overflødigt her i det enkelte at paavise Bevisets Mangel. Ved Gjengivelsen af Beviset skal jeg holde mig til Prof. Petersens Fremstilling i „De algebraiske Ligningers Theori", S. 31—33.

Det maa først bemærkes, at man kun behøver at bevise, at $f(z) = 0$ har mindst en Rod. Hvis nu en vilkaarlig valgt Værdi z_0 for z ikke gjør $f(z)$ til Nul, gaar Beviset ud paa at godtgjøre, at man altid kan bestemme et saadant Tal $h = \varrho_\omega$, at $mod\, f(z_0 + h)$ eller, som vi med sædvanlig Betegnelse ville skrive det, $|f(z+h)|$ bliver en endelig Størrelse mindre end $|f(z)|$.

Man har nemlig

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f^p(z_0)\frac{h^p}{[p]} + A_{p+1}h^{p+1} + \ldots A_n h^n,$$

hvor p kan være 1 eller et højere Tal, idet nogle af de afledede Funktioner kunne blive Nul for $z = z_0$.

[1]) Tilmed findes der i Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, et Bevis, der i det væsentlige er det samme som Argands — men iøvrigt og vistnok med Rette tilskrives D'Alembert — der tager Hensyn til de her gjorte Indvendinger, og hvoraf jeg nedenfor skal give en simplificeret Fremstilling.

Man faar heraf

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)} = 1 + C\varrho^p(\cos(p\omega+a) + i\sin(p\omega+a)) + \frac{A_{p+1}h^{p+1} + \dots A_n h^n}{f(z)},$$

idet
$$\frac{1}{[p]}\frac{f^p(z_0)}{f(z_0)} = C(\cos a + i\sin a),$$

hvor C er en positiv, fra Nul forskjellig Størrelse.

Vælges nu ω saaledes, at $p\omega + a = \pi$, faas

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)} = 1 - C\varrho^p + \frac{A'_{p+1}h^{p+1} + \dots A'_n h^n}{f(z_0)},$$

hvor $A'_{p+1}\dots$ betyder de Værdier af $A_{p+1}\dots$, der svare til den indsatte Værdi af ω.

Man kan nu altid bestemme en Størrelse r saaledes, at naar $|h| \leqq r$,

$$\left|\frac{A'_{p+1}h^{p+1} + \dots A'_n h^n}{f(z_0)}\right| < |Ch^p|$$

eller

$$\left|\frac{A'_{p+1}}{f(z_0)}h + \dots \frac{A'_n}{f(z_0)}h^{n-p}\right| < C,$$

hvilket er bevist i „De algebraiske Ligningers Theori" Nr. 4.

Vælger man derpaa for ϱ en Størrelse, der er mindre end r og tillige mindre end $\sqrt[p]{\frac{1}{C}}$, vil man aabenbart have

$$\frac{|f(z_0+h)|}{|f(z_0)|} < 1.$$

Herved er det allerede godtgjort, at $|f(z)|$ altid ved Indsættelse af visse paa hinanden følgende Værdier z_0, $z_1 = z_0 + h$, $z_2 = z_1 + h_1$ o. s. v. i Stedet for z, kan formindskes — hver Gang naturligvis med en endelig Størrelse — saafremt blot ikke $|f(z_0)|$ er lig Nul.

For nu herfra at komme videre, kan man med fuldstændig Berettigelse opstille følgende Sætning:

(A) Naar en Række af stadig aftagende Størrelser[1]) ikke kan komme under en vis given Størrelse, maa Rækken enten være

[1]) Ved Størrelse forstaas her stadig et positivt Tal.

endelig eller dens Led konvergere mod en endelig, fuldstændig bestemt Størrelse M.

Konvergens vil i denne Forstand sige, at Differensen mellem M og Leddene i Rækken fra det n'te Led at regne, alle ville være mindre end et vilkaarligt opgivet Tal, naar n vælges tilstrækkelig stor. Der er saa meget des mindre Grund til ikke at ville støtte sig til denne Sætning, som den ud fra en anden, mere empirisk Opfattelse kan bevises[1]).

Med Benyttelse af denne Sætning ses nu, at Leddene $|f(z_0)|$, $|f(z_1)|$, ..., der blive mindre og mindre og alle ere større end Nul, nødvendigvis maa konvergere mod en bestemt Størrelse M, og denne kan da efter det foregaaende ikke være forskjellig fra Nul.

Det er altsaa bevist, at man altid kan finde en saadan Række Tal z_0 z_1 z_2 . . ., at Modulerne $|f(z_0)|$ $|f(z_1)|$ . . . konvergere mod Nul. Men det er lige saa nødvendigt at bevise, at selve Værdierne for den uafhængige variable konvergere mod en bestemt Værdi for z. Det er her ikke tilstrækkeligt at godtgjøre, at alle de nævnte Værdier, z_0, $z_0 + h$, $z_0 + h + h_1$ . . . holde sig indenfor endelige Grænser, thi derfor behøver Rækken $z_0 + h + h_1 + h_2 + ...$ ikke at være konvergent. Da Ræsonnementet ikke engang explicite oplyser, om $lim\ (z_{r+1} - z_r) = 0$, kunde det ved første Øjekast jo f. Ex. antages, at man, naar Methoden anvendes paa $z^2 - a = 0$, vilde faa Værdier z_0 z_1 z_2 . . ., der oscillere mellem $+\sqrt{a}$ og $-\sqrt{a}$. Dette er nu ganske vist ikke Tilfældet, idet Fortsættelsen af Beviset, saa at sige som Tilgift, giver en Tilnærmelsesmethode til Beregningen af en Rod i en Ligning, der naturlig nok er den samme som den, man i noget forskjellige Former sædvanligvis bruger, men at en Paavisning af den nævnte Art ubetinget er nødvendig, ses af følgende Exempel.

Lad Ligningen være

$$f(z) = z\bar{z} - 1 = 0,$$

hvor z og $\bar{z}$ betyde konjugert komplexe Tal.

---

[1]) Jfr. Hr. Ingen. J. L. W. V. Jensens Artikel i dette Tidsskrift 1885, S. 33—39 „Om Grænseværdier og irrationale Tal".

Vælges her et vilkaarligt Tal z_0 med en Modulus, der er større end 1, og bestemmes en Række andre Værdier for z ved

$$z_1 = \frac{1 + |z_0|}{2} (\cos a + i \sin a)$$

$$z_2 = \frac{1 + |z_1|}{2} \left(\cos a \left(1 + \frac{1}{2}\right) + i \sin \left(a \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right)\right.$$

$$z_3 = \frac{1 + |z_2|}{2} \left(\cos a \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + i \sin a \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right)$$

o. s. v.

faas en Række Funktionsværdier $f(z_0)$, $f(z_1)$, $f(z_2)\ldots$, der er ubegrænset.

Om Rækken af Moduler ses nu let

1) at de danne en uendelig Række af stadig aftagende Størrelser,

2) at ingen Modulus, der er forskjellig fra Nul, kan være Grænseværdien, da ogsaa den kan formindskes.

Til Trods for, at Værdierne for den uafhængige variable bunke sig mere og mere sammen, kan man imidlertid ikke her slutte, at $f(z)$ vil blive Nul for en bestemt Værdi af z. Ved den sædvanlige grafiske Fremstilling af komplexe Tal ville z's Værdier bestemme Punkter, der ligge i en Spiral, som mere og mere nærmer sig en Cirkel om Begyndelsespunktet som Centrum og med Radius 1, men de ville ikke konvergere mod noget bestemt Punkt af denne Cirkel. Jeg skal udtrykkelig bemærke, at Ræsonnementet ingenlunde viser, at $f(z)$ er Nul for et vilkaarligt Punkt af denne Cirkel — noget andet er det, at man ved et andet Valg af $z_1, z_2 \ldots$ ogsaa kan faa dette godtgjort ad samme Vej — men i den Form, hvori Slutningerne her ere fremsatte, sige de i Virkeligheden intet om, hvorvidt $f(z) = 0$ har eller ikke har nogen Rod.

Af tilstrækkelige Beviser for Algebraens Hovedsætning existerer der ganske vist adskillige. Har man Elementerne af den almindelige Funktionslære til sin Raadighed, kan derfra hentes fuldgyldige Beviser og det paa flere Maader.

Endvidere haves Gauss's tre berømte Beviser; det andet af disse er rent arithmetisk men meget svært; det tredie er simpelt

og i højeste Grad elegant, men det beror paa en fjernere liggende Sætning af Integralregningen[1]).

Det interessanteste af disse Beviser er imidlertid det første, af hvilket der fra Gauss's egen Haand foreligger to Bearbejdelser[2]). Idet Begrundelsen her bygger paa Betragtningen af de to ved Ligningerne $A = 0$ og $B = 0$ fremstillede geometriske Dannelser — hvor $f(x + yi) = A + iB$ — hører Beviset til samme Type som det, Prof. Petersen har fremsat i Ligningernes Theori S. 12—21. Ved tilstrækkelige Kontinuitetsbetragtninger kan det nu godtgjøres, at $A = 0$ og $B = 0$ hver for sig afgrænse bestemte Dele af Planen, og for derefter at faa Beviset i ovennævnte Værk bragt paa uangribelig Form, har man kun nødig for de l. c. Nr. 10 og Nr. 8 benyttede Cirklers Radier at angive endelige Grænser; og disse findes hos Gauss.

Tiltrods for, at der saaledes findes en Del Begrundelser af Sætningen, beror Argands Bevis i hvert Fald paa en Ide, der er saa simpel og naturlig som mulig, og jeg skal derfor i det følgende føre dette Bevis tilende; tilmed hører Beviset i sin Helhed, d. v. s. naar Bevisets Forudsætninger medoptages i dette, ubetinget til de korteste. Herved skal jeg i det væsentlige følge Lipschitz's Fremstilling i den ovenfor citerede Lehrbuch der Analysis I. S. 248—282, men det viser sig, at den kan forkortes betydelig, netop ved at fortsætte ad den Vej, hvoraf Begyndelsen er given i Prof. Petersens ovennævnte Værk. Hertil kræves de følgende Hjælpesætninger, der forøvrigt i alt væsentligt findes sammesteds Nr. 4.

I. Idet $f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots A_{n-1} z$ er en hel rational Funktion, kan man altid finde en saa lille Størrelse ε, at $|f(z)|$ bliver mindre end en vilkaarlig forelagt Størrelse e, naar $|z|$ er mindre end eller lig med ε.

---

[1]) Naar Ligningen er $f(x + yi) = A + iB = 0$, beror Beviset væsentlig paa en Paavisning af, at $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{P}{(A^2 + B^2)^2} dx\, dy$, hvor P er en vis nøjere bestemt altid endelig Funktion af x og y, ikke bliver uforandret ved en Ombytning af Integrationsordenen; heraf sluttes da, at $f(x + yi)$ maa blive Nul mindst for et Punkt i hele Planen.

[2]) Alle Beviserne findes i Gauss' „Gesammelte Werke". Bd. III.

Man behøver nemlig kun at sætte $\varepsilon = \dfrac{e}{e + |A|}$, hvor ingen af Koefficienterne i $f(z)$ har en Modulus, der er større end $|A|$.

Naar man omvendt ved, at $|f(z)| > e$, maa man altsaa have $|z| > \varepsilon$.

Er almindeligere a en saadan Værdi for z, at i et vist Interval $|f(z)| > |f(a)|$, kan man af $|f(z)| - |f(a)| > m$ slutte $|z - a| > \mu$, hvor μ er en vis endelig Størrelse; man har nemlig

$$f(z) - f(a) = B_0 (z-a)^n + B_1 (z-a)^{n-1} + \dots B_{n-1}(z-a)$$

og
$$|f(z) - f(a)| \geqq |f(z)| - |f(a)|.$$

II. Idet $f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n = A_0 z^n + P$ kan man altid finde en saadan Størrelse R, at $|f(z)|$ er større end en vilkaarlig given Størrelse K, naar $|z| \geqq R$.

Man kan nemlig let af I udlede, at man altid kan finde en saadan Størrelse R_1, at $\left|\dfrac{A_0 z^n}{P}\right| > 2$, naar $|z| \geqq R_1$. Vi ville dernæst for Kortheds Skyld føre Beviset ved mathematisk Induktion, hvad der er tilladeligt, da Sætningen er indlysende for $n = 1$.

Lad den nu være bevist for

$$\varphi(z) = A_1 z^{n-1} + \dots A_{n-1} z + A_n,$$

saaledes, at $|\varphi(z)| > K$, naar $|z| > R_2$. Hvis nu tillige $\left|\dfrac{A_0 z^n}{\varphi(z)}\right| > 2$, naar $|z| > R_1$, vil man, naar $|z|$ er større end den største af Størrelserne R_1 og R_2, have

$$|A_0 z^n + \varphi(z)| \geqq |A_0 z^n| - |\varphi(z)| > |\varphi(z)| > K\text{[1]}.$$

Heraf følger omvendt, at naar $|f(z)|$ er mindre end en vis Størrelse K, kan $|z|$ ikke være større end en vis bestemt Størrelse R.

Hvis $\varphi(z)$ er en vilkaarlig anden hel rational Funktion af z, ser man heraf, at $|\varphi(z)|$ vil holde sig under en vis endelig Grænse for de samme Værdier af z, for hvilke $|f(z)|$ gjør det.

Efter Lipschitz føres nu Beviset som et Induktionsbevis.

Ligningen $f'(z) = 0$ forudsættes at have $(n-1)$ Rødder $\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_{n-1}$; disse indsættes i $f(x)$, og ξ_1 være en saadan af

[1]) Mere explicite Bestemmelser findes i forskjellige Former hos Gauss og Lipschitz.

disse Rødder, at $|f(\xi_1)|$ ikke er større end nogen af de andre analoge Moduler $|f(\xi_2)|, \ldots |f(\xi_n)|$. Man begynder da med $z = \xi_1$ og giver paa den oven beskrevne Maade z en saadan Tilvæxt h, at $|f(z+h)| < |f(z)|$.

Ved dette første Valg af h staa muligvis flere Veje aabne; af disse fastholdes en vilkaarlig. Fortsættes derpaa med Operationerne efter samme Skema, kan det ikke oftere hændes, at man for noget optrædende z_r af z faar $f'(z_r) = 0$, thi $f'(z)$ er kun Nul for Værdierne $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_{n-1}$ indsatte i Stedet for z, og Modulerne $|f(\xi_1)| \ldots |f(\xi_n)|$ ere alle en endelig Størrelse større end $|f(z_r)|$, der er dannet ved Formindskelse af $|f(\xi_1)|$; man har altsaa stadig $|f(\xi_s)| - |f(z_r)| > m_s$, hvor m_s er en vis endelig Størrelse. Alle Modulerne $|f'(z_r)|$ maa tilmed være større end en vis endelig Størrelse μ, thi af $|f(\xi_s)| - |f(z_r)| > m_s$ følger efter I $|z_r - \xi_s| > \delta_s$, og deraf udledes

$$\begin{aligned} |f'(z_r)| &= |n A_0 (z_r - \xi_1)(z_r - \xi_2) \ldots (z_r - \xi_{n-1})| \\ &> n\,|A_0|\,\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_{n-1} > \mu. \end{aligned}$$

For nu fra en vis Værdi z_r af z at komme til den næste $z_{r+1} = z_r + h_r$, sætter man

$$\frac{f'(z_r)}{f(z)} = C_r\,(\cos a_r + i \sin a_r)$$

og bestemmer Modulus for h_r ved Grænsebetingelserne

$$|h_r| \leqq \left|\frac{f(z_r)}{f'(z_r)}\right|$$

og

$$|B| = \left|\frac{\frac{1}{[2]} f''(z_r)\,h^2 \pm \ldots \frac{1}{[n]} f^n(z_r)\,h^n}{f(z)}\right| < \left|\frac{f'(z_r)}{f(z)}\,h\right|,$$

eller

$$\left|\frac{1}{[2]} f''(z_r)\,h \pm \ldots \frac{1}{[n]} f^n(z_r)\,h^{n-1}\right| < |f'(z_r)|.$$

Da alle Modulerne $|f(z_r)|$ og altsaa ogsaa $|z_r|$ ligge under en vis endelig Grænse, maa efter II det samme være Tilfældet med enhver af Koefficienterne $\frac{1}{[p]} f^p(z_r)$, og man kan altsaa antage, at samtlige

disse Koefficienter have Moduler, der ere mindre end en vis endelig Størrelse P.

Da altid $f'(z_r) > \mu$, vil den anden af Grænsebetingelserne ubetinget være tilfredsstillet, naar blot

$$|Ph + \ldots Ph^{n-1}| < \frac{1}{2}\mu;$$

Dertil kræves $|h| \leqq \frac{\mu}{2P+\mu}$; den første af Betingelserne giver derimod en højere Grænse for $|h|$, der efter (A), som en Gang for alle forudsættes bevist, konvergerer mod Nul. For alle Værdier af Index r, der ere større end en vis Index s, kan man derfor nøjes med at tage Hensyn til Betingelsen $|h| \leqq \left|\frac{f(z_r)}{f'(z_r)}\right|$.

Da Argumentet ω for h og Argumentet for $\frac{f'(z_r)}{f(z_r)}$ efter Methoden gives Summen π, kan man uden videre sætte

$$h_r = -\frac{f(z_r)}{f'(z_r)},$$ [1]

naar blot $r > s$, hvor s er bestemt ved før nævnte Grænsebetingelser.

Nu er

$$\frac{f(z_{r+1})}{f(z_r)} = 1 - C_r|h_r| + B' = B',$$

hvor B' betyder Værdien af B for den indsatte Værdi af ω, altsaa

$$\left|\frac{f(z_{r+1})}{f(z_r)}\right| = |B'| < \frac{1}{2}C_r|h_r| = \frac{1}{2}.$$

Heraf udledes

$$|f(z_{r+t})| < \frac{1}{2^t}|f(z_r)|.$$

Nu haves, idet stadig $r > s$,

$$|h_r + h_{r+1} + \ldots h_{r+1}| \leqq |h_r| + \ldots |h_{r+t}|$$
$$\leqq \frac{1}{\mu}(|f(z_r)| + \ldots |f(z_{r+t})|)$$
$$< \frac{1}{\mu}|f(z_r)|\left(2 - \frac{1}{2^t}\right) < \frac{2}{\mu}|f(z_r)|,$$

---

[1]) Man har altsaa med det foregaaende en korrekt Bestemmelse af de Grænser, inden for hvilke „Newtons“ Approximationsmethode er rigtig. De herved fundne Grænser ere dog unødvendig snevre.

og dette Udtryk kan ved Valg af r gjøres mindre end en vilkaarlig opgiven Størrelse. Hermed er imidlertid funden den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Rækken

$$z + h + h_1 + h_2 + \dots$$

nærmer sig til et bestemt Tal, og Sætningen er herved godtgjort.

GRAFFES OPLØSNING AF NUMERISKE LIGNINGER.

(af H. J. Hansen).

Efterfølgende Artikel er et Aftryk af en lille Afhandling med Titlen: „Dr. Gräffes Opløsning af de højere numeriske Ligninger, paa en let fattelig Maade fremstillet af H. J. Hansen, Overlærer. Ribe 1840. Trykt hos Chr. sal. Hyphoff“, som er optagen i Ribe Kathedralskoles Skoleprogram for 1840. Da Professor Jul. Petersen i sin Ligningernes Theori kun ganske kort angiver Principet for Gräffes Methode, vil det formentlig have Interesse for Tidsskriftets Læsere at blive bekjendt med Overlærer Hansens velskrevne, udførlige Fremstilling, saa meget mere som Forfatteren maa regnes for en af Landets dygtigste Mathematikere fra Aarhundredets Begyndelse. Hans Jacob Hansen var født 25. Februar 1786 i Brylle i Fyen, hvor Faderen var Tømmermand. 9 Aar gammel kom han i Odense Skole, hvorfra han dimitteredes 1802. Med sin halvandet Aar yngre Kammerat Rasmus Kristian Rask sluttede han i Skolen et varmt Venskab og vedligeholdt lige til den sidstes Død en stadig Brevvexling med ham. Som Student optoges H. i det pædagogiske Seminariums fysisk-mathematiske Klasse og blev efter sin Embedsexamen 1806 ansat som Adjunkt i Ribe, med Undervisningsfagene Mathematik, Naturhistorie og Tysk. 1818 blev han udnævnt til Overlærer og virkede fremdeles som Lærer, indtil han entledigedes i Naade og med Pension 1845. Han døde som ugift i Ribe 2. Febr. 1850. Foruden den efter-

følgende har H. skrevet forskjellige andre mindre Afhandlinger af forskjelligt Indhold, alle udgivne i Ribe. Blandt disse nævnes: Et Par Ord om Methoden i Geometrien, 1812. Om harmoniske Progressioner, 1814. Forsøg til Opløsning af nogle mekaniske Problemer, 1817. Begyndelsesgrundene af Læren om Aberrationen, 1831. Formeln zur Erleichterung des Calculs bei der Variationsrechnung, 1840.

(J. P. G.)

Flere af de fortrinligste Analytikere have bestræbt sig for at opløse den højst vigtige Opgave: at finde alle Rødder af enhver given bestemt højere Ligning, men uden noget synderligt Held. Prof. Gräffe i Zürich har endelig været saa heldig, at opfinde en Maade, hvorved alle Rødder, rationale, irrationale og imaginære let og sikkert findes med stor Nøjagtighed. Gräffe har selv beskrevet sin Opfindelse i Skriftet: Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen, als Beantwortung einer von der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aufgestellten Preisfrage, Zürich 1837. I astronomisches Jahrbuch für 1841 har Prof. Encke fremstillet Opfindelsen i den største Almindelighed, og tilføjet nogle Forbedringer ved Fremgangsmaaden, som ere benyttede i det følgende. Til Anbefaling af denne Opløsningsmaade siger Pr. Encke: „Den er direkte, for saa vidt som man ingensinde maa prøve sig frem; den kan anvendes paa Ligninger af nok saa høje Grader, den fører aldrig til Ligninger af højere Grader end den givne og kræver aldrig Regninger, der ikke lade sig udføre; Røddernes Natur, Antallet af de imaginære lægger den aldeles ingen Hindring i Vejen, den giver altid bestemte Resultater, hvis Rigtighed kan prøves ved en simpel Substitution; den forudsætter aldeles ingen Kundskab til Røddernes Natur og lader sig udlede af Ligningernes simpleste Egenskaber. For dens Korthed taler den Omstændighed, at samtlige Rødder af en Ligning af syvende Grad med sex imaginære i en Tid af to til tre Timer lade sig bestemme saa nøje som Logarithmer med 7 Decimaler tillade det."

Uagtet alle disse Fortrin for de ældre Opløsningsmaader, synes denne alligevel ikke at være bleven saa bekjendt eller erkjendt, som den fortjener. Derfor har jeg troet at burde benytte denne Lejlighed til at bidrage mit til dens videre Udbredelse ved at fremstille dens Natur paa en let fattelig Maade, uden dog at forbigaa noget væsentligt. Afsnittet om Approximation har jeg tilføjet for at man kunde have alt samlet, som behøves til Opgavens fuldstændige Opløsning. Den heri fremsatte Fremgangsmaade til Forbedring af de imaginære Rødder turde maaske have det Fortrin for andre, at den Nøjagtighed, som kan opnaas, ikke er afhængig af Sinustabellerne.

En højere Ligning

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + - \ldots \pm N = 0,$$

hvis Rødder $a, b, c, d \ldots$ alle ere reelle og positive, er som bekjendt et saadant Produkt af Faktorerne $x-a$, $x-b$, $x-c \ldots$, at det forsvinder for $x=a$, $x=b$, $x=c$ o. s. v. Men ere Rødderne $a, b, c, d \ldots$ alle negative, vil Ligningen blive

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + N = 0.$$

I begge Tilfælde bliver $A = a + b + c + d + \ldots$, $B = ab + bc + ad \ldots + bc + bd \ldots + cd + +$, $C = abc + abd + \ldots + acd \ldots + bcd + \ldots$ o. s. v., eller Koefficienterne A, B, C o. s. v. ere første, anden, tredie o. s. v. Kombinationsklasse uden Gjentagelse af Elementerne $a, b, c, d \ldots$ og N er Produktet af dem alle. Betegner man Summerne af disse Kombinationer efter deres Grad med $[a]$, $[ab]$, $[abc]$ o. s. v., blive ovenstaaende Ligninger

$$x^n \pm [a]\, x^{n-1} + [ab]\, x^{n-2} \pm [abc]\, x^{n-3} \text{ o. s. v.} = 0.$$

Af en saadan Lignings Koefficienter kan man beregne alle symmetriske Funktioner af dens Rødder, uden at kjende Rødderne selv. Man kan derfor ogsaa angive de samtlige Koefficienter i en Ligning, hvis Rødder ere de m'te Potenser af den givne Lignings Rødder, nemlig

$$x^n \pm [a^m]\, x^{n-1} + [a^m b^m]\, x^{n-2} \pm [a^m b^m c^m]\, x^{n-3} \text{ o. s. v.} = 0.$$

Man antage nu, at Rødderne ere ordnede efter deres Størrelse,

saaledes at a er den største, b den næststørste, c den tredie o. s. v., uden Hensyn til om de ere positive eller negative, da denne Forskjel bortfalder, naar m er et lige Tal, som det i det følgende altid vil blive. Endvidere være m en meget høj Potens, saa kan m let vælges saaledes, at, for en vis Grad af Tilnærmelse, i Koefficienten

$$[a^m] = a^m + b^m + c^m + +$$

b^m og saa meget mere c^m, d^m o. s. v. maa falde bort imod a^m, og man altsaa i Stedet for $[a^m]$ kan sætte a^m. Paa samme Maade vil i $[a^m b^m]$ Leddet $a^m b^m$ faa en saadan Overvægt over de øvrige $a^m c^m + a^m d^m \ldots + b^m c^m + +$, at denne Koefficient ogsaa kan sættes $= a^m b^m$. Ligesaa vil i enhver følgende Koefficient alle Led bortfalde imod det første og største, saa at Ligningen tilsidst bliver

$$x^n \pm a^m x^{n-1} + a^m b^m x^{n-2} \pm a^m b^m c^m x^{n-3} + \text{o. s. v.} = 0.$$

(Føres Regningen, som Encke anbefaler, med Logarithmer med 5 Decimaler, da bortfalde i $[a^m]$ alle de mindre Led i Sammenligning med a^m, naar a^m er blevet større end 100000 Gange b^m; og saaledes med de øvrige Koefficienter. Men hvor snart dette vil indtræffe, beror paa Forholdet $a : b$; er dette f. Ex. $= 2 : 1$, da forsvinder b^m imod a^m, naar m er $= 17$; er derimod $a : b = 16 : 15$, vil b^m først bortfalde, naar m er omtrent 180).

Har man denne Lignings Koefficienter i Tal, da har man umiddelbart a^m, ved Division af første Koefficient i anden b^m, af anden i tredie c^m o. s. v., hvoraf man da faar Rødderne selv ved at uddrage den m'te Rod.

Gräffes Maade, at danne en saadan Ligning med tilstrækkelig høje Potenser af den givne Lignings Rødder, gaar ud paa følgende: man søger først den Ligning, hvis Rødder ere Kvadraterne af den givnes; ved at behandle den fundne Ligning paa samme Maade, faar man den, hvis Rødder ere fjerde Potens af den givnes; ved at gjentage den samme Operation flere Gange, erholder man Ligninger, hvis Rødder ere 8de, 16de, 32te o. s. v. Potens af den givnes. Naar alle Koefficienter ved en ny Ophøjelse kun vilde blive Kvadrater af de allerede fundne, er den mulige Nøjagtighed opnaaet og der standses med Ophøjningen.

Maaden, af en Ligning at danne en ny, hvis Rødder ere Kvadraterne af den givnes, har længe været bekjendt, da Euler allerede har fremsat Formlen, hvorefter Regningen kan føres, men uden Bevis. Den kan udledes paa forskjellige Maader, hvoraf følgende vel vil være den fatteligste:

Først lægge man Mærke til, at hvad enten den givne Lignings (reelle) Rødder $a, b, c, d \ldots$ ere alle positive eller negative, eller nogle positive og andre negative,* ville deres Kvadrater altid være positive. Den forlangte Ligning vil altsaa altid være Produktet af Faktorerne: $x - a^2$, $x - b^2$, $x - c^2$ o. s. v. og derfor antage denne Form

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + - = 0,$$

hvor A er $= a^2 + b^2 + c^2 +$, $B = a^2b^2 + a^2c^2 + + b^2c^2 +$, $C = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + + b^2c^2d^2 +$ o. s. v.

I den givne Ligning $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ o. s. f. $= 0$ sætte man $x^{\frac{1}{2}}$ i Stedet for x, saa bliver den

$$x^{\frac{n}{2}} - Ax^{\frac{n-1}{2}} + Bx^{\frac{n-2}{2}} - Cx^{\frac{n-3}{2}} \text{ o. s. f.} = 0.$$

Man ordne denne Ligning paa følgende Maade

$$x^{\frac{n}{2}} + Bx^{\frac{n-2}{2}} + Dx^{\frac{n-4}{2}} + = Ax^{\frac{n-1}{2}} + Cx^{\frac{n-3}{2}} + Ex^{\frac{n-5}{2}} +,$$

kvadrere begge Sider af den for at bortskaffe det irrationale, og bringe alt over paa den ene Side, da kommer

$$x^n - (A^2 - 2B)x^{n-1} + (B^2 - 2AC + 2D)x^{n-2} -$$
$$(C^2 - 2BD + 2AE - 2F)x^{n-3} + - = 0,$$

som da er en Ligning, der har a^2, b^2, $c^2 \ldots$ til Rødder, og efter hvilken Gräffe beregner sine Exempler. Behandler man Ligningen $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + + = 0$ paa samme Maade, er det let at se, at man vil faa det samme Resultat; da desuden Forskjellen imellem positive og negative Rødder bortfalder allerede ved første Kvadrering, anbefaler Encke, at give alle de afledte Ligninger denne sidste Form, ved nemlig at forandre alle Tegnene ved første, tredie o. s. v. Koefficient til de modsatte. Herved opnaas for det første den Fordel, at alle de ny Koefficienter dannes paa en og samme Maade af den forrige Lignings.

Ere nemlig den givne Lignings Koefficienter i den Orden de

følge paa hinanden og uden Hensyn til Tegnene A, B, C, D, E, F, G, H o. s. v., da vil den afledte Ligning blive

$$x^n + \left.\begin{matrix}A^2 \\ -2B\end{matrix}\right| x^{n-1} + \left.\begin{matrix}B^2 \\ -2AC \\ +2D\end{matrix}\right| x^{n-2} + \left.\begin{matrix}C^2 \\ -2BD \\ +2AE \\ -2F\end{matrix}\right| x^{n-3} + \left.\begin{matrix}D^2 \\ -2CE \\ +2BF \\ -2AG \\ +2H\end{matrix}\right| x^{n-4} = 0 \quad \text{o. s. v.}$$

Den Lov, hvorefter disse nye Koefficienter dannes af de givne, er saa i Øjne faldende, at det vil være overflødigt, at udtrykke den i Ord. Jeg vil i det Sted anføre de fuldstændige Formler for de hyppigst forekommende Tilfælde, og som ville blive anvendte i det følgende.

Er $n=3$, altsaa den givne Ligning $x^3+Ax^2+Bx+C=0$, da bliver den ny Ligning

$$x^3 + \left.\begin{matrix}A^2 \\ -2B\end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix}B^2 \\ -2AC\end{matrix}\right| x + C^2 = 0.$$

Er den givne Ligning

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

da bliver den afledte

$$x^4 + \left.\begin{matrix}A^2 \\ -2B\end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix}B^2 \\ -2AC \\ +2D\end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix}C^2 \\ -2BD\end{matrix}\right| x + D^2 = 0.$$

For $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, bliver den ny Ligning

$$x^5 + \left.\begin{matrix}A^2 \\ -2B\end{matrix}\right| x^4 + \left.\begin{matrix}B^2 \\ -2AC \\ +2D\end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix}C^2 \\ -2BD \\ +2AE\end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix}D^2 \\ -2CE\end{matrix}\right| x + E^2 = 0$$

o. s. v.

Hvad enten den givne Lignings relle Rødder a, b, c o. s. v. ere positive eller negative, vil den første Ligning, som udledes efter disse Formler, være et Produkt af Faktorerne $x+a^2$, $x+b^2$, $x+c^2$ o. s. v., den anden vil være Produktet af $x+a^4$, $x+b^4$, $x+c^4$ o. s. v. Følgelig ville alle Koefficienter i de afledte Ligninger være positive, og dette er en anden Fordel ved denne ubetydelige Forandring. Saasnart der nemlig i de afledte Ligninger

viser sig, om og kun en eneste negativ Koefficient, er det et sikkert Kjendetegn paa, at der maa være imaginære Rødder tilstede i den oprindelige Ligning.

Regningen kan udføres paa flere Maader. Saa længe Koefficienterne ere smaa Tal, er det rettest at regne med disse selv, for at de nye Koefficienter kunne blive fuldkommen rigtige. Efter nogle Ophøjninger ville disse være saaledes voxne, at det vilde være næsten umuligt, at fuldføre Regningen paa denne Maade. Gräffe har da brugt to Maader til at fortsætte Regningen. Ved et af sine Exempler har han angivet et Antal af de første Cifre af hver Koefficient, og vedføjet, hvor mange Cifre der ere bortkastede. Ved de øvrige Exempler bruger han Logarithmer med 7 Decimaler i Stedet for Koefficienterne, men angiver ikke, hvorledes han har beregnet dem. Har han beregnet hvert Led ved Hjælp af Logarithmer, og udført Additionerne og Subtraktionerne med Tallene selv, vil denne Regning ogsaa være meget vidtløftig. Derimod bliver Regningen meget let og lader sig hurtigt fuldføre, naar man efter Enckes Forskrift bruger Logarithmer med 5 Decimaler og udfører de forefaldende Additioner og Subtraktioner ved Hjælp af den bekjendte Tabel af Gauss, ved hvilken man af to Tals Logarithmer kan finde Logarithmen til deres Sum og Differens[1]. Under hele Regningen bruger man intet andet Hjælpemiddel end denne Tabel, og Regningen er tilendebragt, naar alle Koefficienter ophøre at have Indflydelse paa hverandres Kvadrater, eller naar det dobbelte af hver Logarithme er 5,3 større end Summen af de to nærmest staaende. Rødderne findes med stor Nøjagtighed, saa at altid 5 Cifre ere rigtige og som oftest det sjette ogsaa. Aarsagen hertil er vistnok den, at Usikkerhederne i de sidste Decimaler ved

[1]) En til Interpolation særdeles bekvemt indrettet Udgave af Logarithmerne og Gausses Tabel med 5 Decimaler er besørget af Westphal, Kønigsberg 1821. Gausses Tabel for Logarithmer med 7 Decimaler, beregnet af E. A. Matthiessen, er udkommen i Altona 1817. — Undertiden bliver det nødvendigt at føre Begyndelsen af Regningen med Logarithmer med 7 Decimaler, nemlig naar Argumentet i Rubrikken B bliver saa lille, at flere Cifre af Tallet i Rubrikken C, bliver ubestemte.

de ofte gjentagne Additioner og Subtraktioner for en stor Del ophæve hverandre, og at man tilsidst dividerer med et stort Tal.

Ere Rødderne fundne, staar endnu tilbage at bestemme deres Tegn. Hertil er en simpel Substitution i den givne Ligning tilstrækkelig, hvilken desuden er nødvendig for at forsikre sig om Regningens Rigtighed.

Behøves der ved irrationale Rødder en større Nøjagtighed end den saaledes opnaaede, vil man kunne erholde denne, i hvilken Grad man ønsker, ved gjentagne Gange at anvende Newtons Approximationsregel.

Undertiden indtræffer det Tilfælde, at en eller flere af de logarithmiske Koefficienter ikkun langsomt vil fordobles. Dette er da et Tegn paa, at en eller flere Rødder forekomme dobbelte. En Ligning af fjerde Grad være f. Ex. sammensat af Faktorerne $x+a$, $x+a$, $x+b$, $x+c$, altsaa

$$\begin{array}{r|r|r|l} x^4 + 2a & x^3 + a^2 & x^2 + a^2b & x + a^2bc = 0 \\ + b & + 2ab & + a^2c & \\ + c & + 2ac & + 2abc & \\ & + bc & & \end{array}$$

Har man nu ophøjet Rødderne til en saa høj Potens m, at i hver Koefficient alle Led forsvinde mod det største, da vil Faktoren 2 ved den første forvolde, at denne dog ikke bliver m'te Potens af a, derimod er det tydeligt, at Koefficienten til x^2 vil blive a^{2m}; naar dens Logarithme derfor divideres med m, vil man faa Logarithmen til a^2. Det samme vil finde Sted, hvis det er enten b eller c, der forekommer dobbelt, kun at det da bliver anden eller tredie Koefficient, som ikke vil blive til Kvadrat; og noget lignende, naar et Par Rødder ere nær ved at være lige store. I en Ligning kunne ogsaa forekomme flere Par lige store eller nærved lige store Rødder[1]). I alle saadanne Tilfælde behøver man ikke at vedblive med Ophøjningen indtil alle Rødder selv ere afsondrede, men kun saa langt, til deres Produkt kan afsondres fra Produktet af de

[1]) Ved lige store Rødder forstaas her saadanne, som have samme Talværdi uden Hensyn til Tegnene, da Forskjellen mellem disse bortfalder allerede ved første Kvadrering.

øvrige, og da danne de trinomiske Faktorer eller Ligninger af anden Grad, som opløste give de enkelte Rødder. (Se andet Exempel).

Paa samme Maade gaar man frem, naar Ligningen har imaginære Rødder. I en Ligning med reelle Koefficienter kunne de imaginære Rødder kun forekomme parvis og have Formen $p + q\sqrt{-1}$ og $p - q\sqrt{-1}$, hvor p kan være positiv eller negativ. For lettere at lære at kjende Beskaffenheden af disse Rødders højere Potenser, sætte man $p = g \,.\, cos\,\varphi$, $q = g \,.\, sin\,\varphi$, altsaa $tg\,\varphi = \frac{q}{p}$ og $g = \sqrt{p^2 + q^2}$, saa bliver $p + q\sqrt{-1} = g\,(cos\,\varphi + sin\,\varphi\sqrt{-1})$ og $p - q\sqrt{-1} = g\,(cos\,\varphi - sin\,\varphi\sqrt{-1})$, i hvilke Udtryk g kaldes Modulus. Naar disse Udtryk ophøjes til m'te Potens, blive de $g^m\,(cos\,m\,\varphi + sin\,m\,\varphi\sqrt{-1})$ og $g^m\,(cos\,m\,\varphi - sin\,m\,\varphi\sqrt{-1})$ og altsaa Faktorerne til Ligningen $x + g^m\,(cos\,m\varphi + sin\,m\varphi\sqrt{-1})$ og $x + g^m\,(cos\,m\,\varphi - sin\,m\,\varphi\sqrt{-1})$, hvis Produkt udgjør den trinomiske Faktor $x^2 + 2g^m\,cos\,m\varphi\;x + g^{2m}$, som man kan betegne $x^2 + f_m x + g^{2m}$, og hvor $f_m = 2g^m\,cos\,m\varphi$ i de allerfleste Tilfælde er mindre, aldrig større end $2g^m$. Nemlig f_m bliver $= 2g^m$, naar $cos\,m\varphi = 1$, d. e. naar $m\varphi$ er $= \pi$ eller et Multiplum af π. I alle andre Tilfælde vil f_m efter den forskjellige Værdi af $cos\,m\varphi$ snart tage til, snart af, samt forandre Tegn, men uden Hensyn til Tegnet være mindre end $2g^m$. Har en Ligning blot imaginære Rødder, vil den være et Produkt af trinomiske Faktorer af Formen $x^2 + fx + g^2$, hvor f er mindre end $2g$. For at have noget bestemt at holde sig til, kan man antage, at den givne Ligning er af fjerde Grad, altsaa et Produkt af $x^2 + fx + g^2$ og $x^2 + f'x + g'^2$, hvor f er mindre end $2g$, f' mindre end $2g'$ og desuden g^2 større end g'^2. Udvikles dette Produkt, kommer

$$x^4 \begin{array}{c|} +f \\ +f' \\ \end{array} x^3 \begin{array}{c|} +g^2 \\ +g'^2 \\ +ff' \end{array} x^2 \begin{array}{c|} +fg'^2 \\ +f'g^2 \\ \end{array} x + g^2 g'^2 = 0.$$

Ophøjes denne Lignings Rødder til en høj Potens m, da ville af den anførte Grund f_m og f'_m i første og tredie Koefficient vedblive at være ubestemte. Efterhaanden som m tages større, vil

g'^{2m} i anden Koefficient forsvinde imod g^{2m}. Men at ogsaa Leddet $f_m f'_m$ tilsidst maa falde bort for g^{2m}, indser man let ved følgende Betragtning: f_m og f'_m maa som oftest være mindre, aldrig større end $2g^m$ og $2g'^m$. Sætter man altsaa i Stedet for f_m og f'_m $2g^m$ og $2g'^m$, forandres dette Led til $4g^m g'^m$, men dette er mindre end g^{2m}, saasnart g^m bliver større end $4g'^m$. Fortsætter man altsaa Ophøjelsen, vil man endelig naa en Potens, hvor ogsaa dette Led forsvinder i Sammenligning med g^2. (Er f. Ex. $g'^2 = 0{,}9g^2$, bliver $4g'^m$ mindre end g^m, naar m er 16, og forsvinder ganske imod g^m, naar m bliver 128, og Regningen føres med Logarithmer med 5 Decimaler). Naar nu den anden Koefficient er bleven g^{2m}, søges af denne og den fjerde g^2 og g'^2, disse indsættes i ovenstaaende Formel, og dennes Koefficienter sammenlignes med den givne Lignings. Herved erholder man 3 Ligninger til Bestemmelse af de to ubekjendte f og f', hvoraf man lettest kan benytte dem, som første og tredie Koefficient levere, da de ere af første Grad. (Se Exemplerne 3, 4 og 5). Paa en lignende Maade vil man kunne behandle Ligninger med flere Par imaginære Rødder. Saaledes vil en Ligning af sjette Grad med 3 Par imaginære Rødder til Bestemmelse af f, f' og f'' levere 5 Ligninger, 2 af første, 2 af anden og 1 af tredie Grad; en Ligning med 4 Par imaginære Rødder giver 7 Ligninger til Bestemmelsen af de fire f, hvoriblandt to af første og to af anden Grad, som blive de letteste at benytte, og hvorved de andre kunne tjene til Prøve. For at undersøge det Tilfælde, hvor en Ligning indeholder reelle og imaginære Rødder, blandede imellem hverandre, kan man multiplicere ovenstaaende Ligning med $x + a$ eller med $x + a$ og $x + b$ o. s. v. Man vil finde, at umiddelbart foran en Koefficient, hvori g^2, $g^2 g'^2$ ... eller ag^2, $ag^2 g'^2$ eller g^2, $ag^2 g'^2$ o. s. v. er det overvejende Led, vil gaa en anden, hvori f eller et Produkt af f har Overhaand, og som følgelig ingensinde vil blive til Kvadrat, men ved de paa hverandre følgende Ophøjninger af og til skifte Tegn. Hvor en saadan Koefficient forekommer, er den altsaa et sikkert Kjendetegn paa, at den følgende bestemmer en Modulus.

Med Undtagelse af det temmelig sjeldne Tilfælde, at en Ligning

skulde indeholde 3 eller flere lige store Rødder, som man let vil vide at behandle i Analogi med det, som ovenfor er sagt om 2 lige store Rødder, indeholder det foregaaende en fuldstændig Opløsning af Opgaven: at finde alle Rødder af en given højere Ligning. Det vil imidlertid være passende at oplyse det hidtil sagte ved nogle Eksempler.

Første Exempel.

Den givne Ligning være

$$x^3 - 5x^2 - 73x - 120 = 0.$$

Naturligvis forsøger man først, om ikke det sidste Leds Faktorer ere Ligningens Rødder. Da dette ikke er Tilfældet, begyndes Ophøjningen, og første Gang regnes med Tallene selv. Ligningen med anden Potens af Rødderne bliver

$$x^3 + 171x^2 + 4129x + 14400 = 0,$$

og naar man i Stedet for Tallene skriver deres Logarithmer

$$x^3 + 2{,}23300x^2 + 3{,}61584x + 4{,}15836._{25} = 0.$$

Hvilken Potens af Rødderne man har, vil jeg herefter tilkjendegive ved at sætte Exponenten foran Linien.

$$4,\ x^3 + 4{,}32187x^2 + 7{,}08364x + 8{,}31672._5$$

$$8,\ x^3 + 8{,}61914x^2 + 14{,}14078x + 16{,}63345$$

$$16,\ x^3 + 17{,}23759x^2 + 28{,}28075x + 33{,}26690.$$

Her ophører Ophøjningen, fordi det dobbelte af første og anden Koefficient er mere end 5,3 større end Summen af dem, de staa imellem. Divideres Koefficienterne med 16, komme Logarithmerne til a, ab og abc, hvoraf Rødderne a, b og c findes. Man finder *Logar.* $a = 1{,}0773494$, *Logar.* $b = 0{,}6901975$, *Logar.* $c = 0{,}3116344$; altsaa $a = 11{,}94949$, $b = 4{,}90002$, $c = 2{,}04944$. Hvilke af dem, der ere positive eller negative, kunde man prøve, ved at indsætte de nærmeste hele Tal 12, 5 og 2 i den givne Ligning; men da denne paa Grund af den ene Afvexling og de to Følger af Tegn maa have en positiv og to negative Rødder, og et Øjekast paa Ligningen viser, at $+5$ og $+2$ ere meget langt fra at fyldestgjøre den, maa de to mindre Rødder være negative og den største positiv. En let Prøve paa Regningens Rigtighed er at

sammenligne de fundne Rødders Sum med den givne Lignings første Koefficient. Ved de ovenfor fundne Værdier bliver denne Sum = 5,00003 i Stedet for 5.

Andet Exempel

maa være Ligningen $x^4 - \frac{41}{8}x^3 + \frac{287}{32}x^2 - \frac{393}{64}x + \frac{45}{32} = 0.$

Indsættes fra Begyndelsen Logarithmerne, bliver den

$$1,\ x^4 - 0{,}70969x^3 + 0{,}95273x^2 - 0{,}78821x + 0{,}14806._{25}$$
$$2,\ x^4 + 0{,}92055x^3 + 1{,}30770x^2 + 1{,}09631x + 0{,}29612._5$$
$$4,\ x^4 + 1{,}45846x^3 + 2{,}31914x^2 + 1{,}87789x + 0{,}59225$$
$$8,\ x^4 + 2{,}61159x^3 + 4{,}59271x^2 + 3{,}60938x + 1{,}18450$$
$$16,\ x^4 + 4{,}94881x^3 + 9{,}18447x^2 + 7{,}18615x + 2{,}36900$$
$$32,\ x^4 + 9{,}68499x^3 + 18{,}36894x^2 + 14{,}37098x + 4{,}73800.$$

De tre sidste Koefficienter ere her blevne til Kvadrater; man behøver derfor kun at fortsætte Ophøjningen med de to første; man erholder

$$64,\ x^4 + 19{,}27333x^3 + 36{,}73788x^2$$
$$128,\ x^4 + 38{,}53296x^3 + 73{,}47576x^2$$
$$256,\ x^4 + 77{,}06570x^3 + 146{,}95152x^2.$$

Her ophører ogsaa den anden Koefficients Indflydelse paa den første, og man finder Rødderne: $a = 2{,}00003$, $b = 1{,}87496$, $c = 0{,}75000$, $d = 0{,}50000$, som en let Prøve viser at være 2, $1\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$ og $\frac{1}{2}$, der alle maa være positive.

Af de tre bestemte Koefficienter ved 32te Potens, kunde man ogsaa have fundet alle Rødder saaledes: anden og tredie give $c = \frac{3}{4}$, tredie og fjerde $d = \frac{1}{2}$, den anden $ab = 3\frac{3}{4}$ og ifølge Ligningens Natur maa $a + b + c + d$ være $= \frac{41}{8}$, altsaa $a + b = \frac{31}{8}$; naar man altsaa opløser Ligningen $x^2 - \frac{31}{8}x + \frac{15}{4} = 0$, erholder man de to manglende Rødder: 2 og $1\frac{7}{8}$ ligesom ovenfor.

Havde der iblandt den givne Lignings Koefficienter været nogle, som vare mindre end 1, kunde man for at undgaa negative Logarithmer, multiplicere Rødderne med et Tal, hvorved Koefficienterne bleve, ligesom i ovenstaaende Ligning, større end 1. Var f. Ex. den givne Ligning $x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{7}x - \frac{5}{13} = 0$, og man sætter

$x = \frac{1}{4} y$, forandres den til $y^3 - \frac{4}{3} y^2 + \frac{48}{7} y - \frac{320}{13} = 0$, for hvilken alle Logarithmer ere positive. Ligeledes med $x^3 + 1,6x^2 + 0,09x - 0,09 = 0$; sættes her $x = \frac{1}{10} y$, kommer $y^3 + 16y^2 + 9y - 90 = 0$, der er let at behandle.

Tredie Exempel.

Ligningen være $x^3 - 2x - 5 = 0$.

$$2,\ x^3 + 4x^2 + 4x + 25 = 0$$
$$4,\ x^3 + 8x^2 - 184x + 625 = 0$$
$$8,\ x^3 + 432x^3 + 23856x + 390625 = 0,$$

med Logarithmer $x^3 + 2,63548x^2 + 4,37760x + 5,59176._{00}$

$$16,\ x^3 + 5,14274x^2 + 8,36330x + 11,18352$$
$$32,\ x^3 + 10,27496x^2 + 16,03710x + 22,36704$$
$$64,\ x^3 + 20,54988x^2 - 32,87992x + 44,73408.$$

Her er Ophøjningen til Ende. Foranderligheden ved den anden Koefficient og dens Tegn viser, at der maa være et Par imaginære Rødder, hvis fælles Modulus den tredie Koefficient maa bestemme. Første Koefficient giver $a = + 2,094555$, første og tredie $g^2 = 2,387141$. Sætter man nu den givne Ligning $= (x-a)(x^2+fx+g^2)$, bliver $f = a$, og den trinomiske Faktor

$$x^2 + 2,094555x + 2,387141 = 0,$$

som opløst giver $x = - 1,047277 \pm \sqrt{- 1,290352}$.

Fjerde Exempel

maa være følgende af Fourier fremsatte Ligning:

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$$
$$2,\ x^4 + 16x^3 + 22x^2 + 9x + 529 = 0$$
$$4,\ x^4 + 212x^3 + 1254x^2 - 23195x + 279841 = 0,$$

med Logarithmer

$$x^4 + 2,32634x^3 + 3,09830x^2 - 4,36539x + 5,44691._{18}$$
$$8,\ x^4 + 4,62774x^3 + 7,07797x^2 - 8,21438x + 10,89382._{26}$$
$$16,\ x^4 + 9,24967x^3 + 14,19662x^2 - 18,26656x + 21,78764._{52}$$
$$32,\ x^4 + 18,49930x^3 + 28,49549x^2 + 36,17145x + 43,57529._{04}$$
$$64,\ x^4 + 36,99860x^3 + 56,98682x^2 - 71,18073x + 87,15058._{08}.$$

Ved en ny Ophøjning vilde første og anden Koefficient kun blive Kvadraterne af de allerede fundne, den tredie forbliver ubestemt, hvorfor der er imaginære Rødder, hvis Modulus den fjerde bestemmer. Dividerer man med 64, giver den første *Log. a*, den anden *Log. ab*, den fjerde *Log. abg²*. Man vil finde $Log.\, a =$ 0,578103, $Log.\, b = 0{,}312316$, $Log.\, g^2 = 0{,}471309$ eller $a = +$ 3,78532, $b = +\, 2{,}05266$, $g^2 = 2{,}96012$. Da der kun er et f at søge, behøver man kun at udvikle de to første Led af Produktet $(x - a)(x - b)(x^2 + fx + g^2)$, nemlig $x^4 - (a + b - f)\, x^3$ og sammenligne dette med den givne Ligning. Man har $a + b - f = 4$ eller $f = a + b - 4 = +\, 1{,}83798$. Den trinomiske Faktor er altsaa $x^2 + 1{,}83798x + 2{,}96012 = 0$. Opløses denne kvadratiske Ligning paa sædvanlig Maade, bliver $x = -\, 0{,}91899 \pm \sqrt{-\, 2{,}11558} = -\, 0{,}91899 \pm 1{,}45450 \sqrt{-1}$. Anvender man herpaa den nedenfor beskrevne Approximationsmaade, vil man nøjere finde $x = -\, 0{,}91898951 \pm 1{,}45450050 \sqrt{-1}$.

Femte Exempel

være følgende Ligning, der ligesom den forrige er fremsat af Fourier:

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$2,\quad x^5 - x^4 + 9x^3 - 2x^2 + 0x + 1 = 0$$

$$4,\quad x^5 - 17x^4 + 77x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$8,\quad x^5 + 135x^4 + 6005x^3 - 646x^2 + 12x + 1 = 0$$

$$16,\quad x^5 + 6215x^4 + 36234469x^3 + 273466x^2 + 1436x + 1 = 0;$$

med Logarithmer

$$x^5 + 3{,}79344x^4 + 7{,}55912x^3 + 5{,}43690x^2 + 3{,}15715x + 0$$

$$32,\quad x^5 - 7{,}52945x^4 + 15{,}11824x^3 - 10{,}46658x^2 + 6{,}18045x + 0$$

$$64,\quad x^5 - 15{,}17044x^4 + 30{,}23648x^3 - 21{,}49432x^2 + 12{,}37184x + 0$$

$$128,\quad x^5 - 30{,}09877x^4 + 60{,}47296x^3 + 42{,}21100x^2 + 24{,}74417x + 0.$$

At gaa videre med Ophøjningen, nytter intet. De negative og foranderlige Koefficienter vise, at der er to Par imaginære Rødder,

hvis Moduler bestemmes af anden og fjerde, ligesom den femte giver den reelle Rod. Dividerer man med 128 og subtraherer, faar man $Log.\, g^2 = 0{,}472445$, $Log.\, g'^2 = 0{,}720869 - 1$, $Log.\, a = 0{,}806686 - 1$, altsaa $g^2 = 2{,}96787$, $g'^2 = 0{,}52586$, $a = 0{,}64074$. Da g^2 og g'^2 i de trinomiske Faktorer nødvendig maa have $+$, maa den lineære Faktor være $x - a = 0$. For at finde de trinomiske Faktorer kunde man nu udvikle Produktet $(x^2 + fx + g^2)$ $(x^2 + f'x + g'^2)$ $(x - a)$, og sammenligne Koefficienterne for de forskjellige Potenser af x med den givne Lignings. Derved fik man 4 Ligninger til Bestemmelsen af f og f', men da kun to af disse behøves, er det nok at udvikle Koefficienterne til x^4 og x, hvilke for f og f' give to Ligninger af første Grad, nemlig $f + f' = 1 + a$ og $ag'^2 f + ag^2 f' = g^2 g'^2 - 2$ eller med de ovenfor fundne Værdier $f + f' = 1{,}64074$ og $0{,}33694 f + 1{,}90165 f' = -0{,}43931$. Disse to Ligninger give ved en let Regning $f = +2{,}27481$, $f' = -0{,}63407$. De Ligninger, hvoraf de imaginære Rødder findes, ere altsaa $x^2 + 2{,}27481 x + 2{,}96787 = 0$ og $x^2 - 0{,}63407 x + 0{,}52586 = 0$, og disse Rødder selv $-1{,}137405 \pm 1{,}29390 \sqrt{-1}$ og $+0{,}317035 \pm 0{,}65219 \sqrt{-1}$. Multiplicerer man til Prøve paa Regningens Rigtighed de to trinomiske og den binomiske Faktor med hverandre, vil man faa

$$x^5 + x^4 + 1{,}00005 x^3 - 1{,}99999 x^2 + 1{,}99998 x - 0{,}999999.$$

De fundne Rødder maa altsaa være meget nøjagtige.

Approximation.

Det er ovenfor bemærket, at man ved Newtons Tilnærmelsesmaade kan finde Rødderne med hvilken som helst Nøjagtighed, man ønsker. Denne Maade bestaar i det væsentlige i følgende: Man sætte den givne Ligning $= fx$ og dens første Differentialkoefficient $\frac{dfx}{dx} = f'x$. Er nu a en nær Tilnærmelse til en af Rødderne og man indsætter a i Stedet for x i fx og $f'x$, og betegner Resultaterne med fa og $f'a$, da vil den Rettelse $= v$, som maa anbringes ved a, for at faa en større Tilnærmelse, være

$= -\frac{fa}{f'a}$, saa at Roden vil nærmere være $= a - \frac{fa}{f'a}$. (Det behøver næppe at erindres, at v skal subtraheres, naar fa og $f'a$ have lige Tegn, men i modsat Fald adderes). Forlanges der større Nøjagtighed, gjentages den samme Regning med det saaledes forbedrede a. For ikke at gjøre Regningen vidtløftigere end fornødent, kan bemærkes, at man ved denne Fremgangsmaade hver Gang erholder omtrent saa mange ny Cifre rigtige, som man allerede har, eller at Nøjagtigheden hver Gang kan fordobles. Til Exempel paa Regningen maa den ovenfor opløste Ligning $x^3 - 2x - 5 = 0$ tjene. Her er $fx = x^3 - 2x - 5$, altsaa $f'x = 3x^2 - 2$; man fandt $a = 2{,}094555$, heraf følger

$a^2 = 4{,}387160648025$ og $a^3 = 9{,}189149271124003875$;

indsættes disse i Stedet for x, x^2, x^3 i fx og $f'x$, og man af de sidste usikre Cifre kun beholder saa mange, som ere tilstrækkelige til at Divisionen kan blive rigtig i 10 eller 11 Dicimaler, findes

$$fa = 0{,}000039271124 00$$
$$f'a = 11{,}161481944$$
$$v = -\frac{fa}{f'a} = 0{,}00000351845$$
$$\text{og } a - v = 2{,}09455148155.$$

Forlanges der større Nøjagtighed, indsættes det saaledes forbedrede a. Man finder

$$a^2 = 4{,}3871459088632999904025$$
$$a^3 = 9{,}1891029631856462713196\,..$$
$$fa = 0{,}0000000000856462713196\,..$$
$$f'a = 11{,}1614377265899\,..$$
$$\text{altsaa } v = 0{,}0000000000076734085 17576$$
$$a - v = 2{,}0945514815423265914824 24$$

De 22 første Decimaler stemme overens med **Fouriers**, der har beregnet samme Rod med 32 Decimaler. Hvor der, som her kun er et Par imaginære Rødder, lade disse sig nu finde med samme Nøjagtighed som de reelle. Ved nærværende Exempel kunde man dividere Ligningen med $x - a$, for at erholde Ligningen $x^2 + fx + g^2 = 0$; men man vil langt lettere finde f og g^2 ved

at udvikle Produktet $(x^2 + fx + g^2)(x - a)$ og sammenligne Koefficienterne med den givne Lignings. Man finder saaledes $f = a$, $g^2 = a^2 - 2$; indsættes de ovenfor fundne Værdier for a og a^2, og der kun beholdes 10 Decimaler, bliver Ligningen $x^2 + 2{,}0945514815x + 2{,}3871459089 = 0$, der opløst paa sædvanlig Maade giver

$$x = -1{,}0472757408 \pm 1{,}1359398891\sqrt{-1}.$$

Dog lader enhver imaginær Rod, hvoraf man har en Tilnærmelse, sig forbedre uden Hensyn til Ligningens øvrige Rødder. De imaginære Rødder og deres Potenser have i Almindelighed Formen $p + q\sqrt{-1}$, hvor p og q ere reelle Tal, hvoraf kun i enkelte Tilfælde det ene eller andet kan blive $= 0$. Naar derfor en saadan tilnærmet Rod $a = p + q\sqrt{-1}$ indsættes i fx og $f'x$, blive disse Udtryk af samme Form. Man sætte derfor $fa = b + c\sqrt{-1}$, $f'a = d + e\sqrt{-1}$ og desuden Forbedringen $v = v' + v''\sqrt{-1}$, og indsætte disse Udtryk i Ligningen $v = -\frac{fa}{f'a}$ eller $fa + v.f'a = 0$, saa erholder man denne Ligning

$$b + dv' - ev'' + (c + ev' + dv'')\sqrt{-1} = 0,$$

der af bekjendte Grunde deler sig i disse to

$$b + dv' - ev'' = 0, \qquad c + ev' + dv'' = 0.$$

Af disse to Ligninger af første Grad finder man let de to ubekjendte v' og v'', og den forbedrede Rod vil være $x = a + v' + v''\sqrt{-1}$. Gjentager man denne Behandling med den saaledes fundne Rod, kan man bringe det til hvilken som helst Grad af Nøjagtighed, der maatte forlanges.

For ved et Exempel at vise Fremgangsmaaden ved Regningen, vil jeg antage, at man havde fundet, at $a = -1{,}047 + 1{,}136\sqrt{-1}$ var en tilnærmet Rod af Ligningen $x^3 - 2x - 5 = 0$, og man vil have denne forbedret. Her er

$a^2 = -0{,}194287 - 2{,}378784\sqrt{-1}$, $a^3 = +2{,}90571711 + 2{,}26987682\sqrt{-1}$, og naar disse Værdier indsættes i fx og $f'x$ faar man

$$fa = -0{,}00028289 - 0{,}00212318\sqrt{-1} = b + c\sqrt{-1},$$
$$f'a = -2{,}582861 - 7{,}136352\sqrt{-1} = d + e\sqrt{-1}.$$

Ligningerne $b + dv' - ev'' = 0$ og $c + ev' + dv'' = 0$ blive altsaa

$$- 0{,}00028289 - 2{,}582861\,v' + 7{,}136352\,v'' = 0$$

og

$$- 0{,}00212318 - 7{,}136352\,v' - 2{,}582861\,v'' = 0.$$

Heraf faas $v' = - 0{,}00027574$, $v'' = - 0{,}00006015$,

og altsaa den forbedrede Rod $= a + v' + v''\sqrt{-1} =$

$$- 1{,}04727574 + 1{,}13593985\sqrt{-1}.$$

Ulejligheden med den noget vidtløftige Regning erstattes fuldkommen derved, at man med det samme har den anden tilsvarende Rod lige saa nøjagtig ved blot at forandre Tegnet for den imaginære Del til det modsatte.

Forbedringen v udgjør egentlig en uendelig Række, hvoraf $-\dfrac{fa}{f'a}$ ikkun er det første Led. Er $fx = 0$ den givne Ligning, $f'x$, $f''x$, $f'''x$ o. s. v. dens første, anden, tredie o. s. v. Differentialkoefficient, og man betegner med f, f', f'', f''' o. s. v. hvad disse Udtryk blive, naar den Rod, der skal forbedres, indsættes, da ville de første Led af Rækken, ordnede efter Potenser af f, være $v =$

$$-\frac{f}{f'} - \frac{f''f^2}{2(f')^3} - \left.\begin{array}{c}\dfrac{(f'')^2}{2(f')^5} \\ + \dfrac{f'''}{6(f')^4}\end{array}\right| f^3 - \left.\begin{array}{c}\dfrac{5(f'')^3}{8(f')^7} \\ + \dfrac{5f''f'''}{12(f')^6} \\ - \dfrac{f^{IV}}{24(f')^5}\end{array}\right| f^4 - \left.\begin{array}{c}\dfrac{7(f'')^4}{8(f')^9} \\ + \dfrac{7(f'')^2 f'''}{8(f')^8} \\ - \dfrac{f''f^{IV}}{8(f')^7} \\ - \dfrac{(f''')^2}{12(f')^7} \\ + \dfrac{f^{V}}{120(f')^6}\end{array}\right| f^5 \ldots$$

Er f. Ex. $fx = x^3 - 2x - 5$, saa er $f'x = 3x^2 - 2$, $f''x = 6x$, $f'''x = 6$, $f^{IV}x = f^{V}x = 0$; indsætter man som første Tilnærmelse $x = 2$, blive $f = -1$, $f' = 10$, $f'' = 12$, $f''' = 6$. Med disse Værdier blive de fire første Led af $v = +0{,}1 - 0{,}006 + 0{,}00072 - 0{,}0001$, altsaa den forbedrede Rod $= 2{,}0946$; men havde man beregnet alle de opstillede Led af v, vilde man have erholdt $x = 2{,}09455288$.

Havde man sat $x = 2{,}1$, vilde man have fundet $f = 0{,}061$,

$f' = 11,23$, $f'' = 12,6$, $f''' = 6$, og disse Værdier vilde give de fire første Led af v, beregnede med ti Decimaler

$$v = -0,0054318789 - 0,0000165524 - 0,0000001009$$
$$+ 0,0000000143,$$

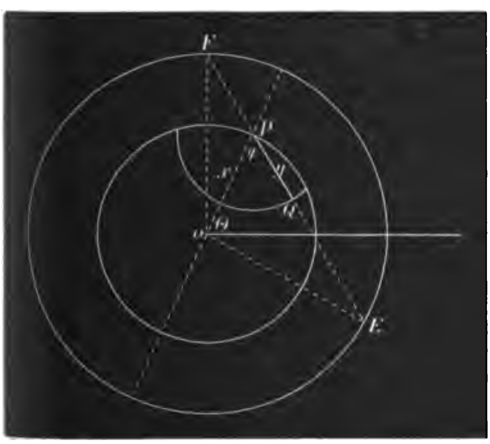
altsaa den forbedrede Rod $= 2,0945514821$, hvor de 8 Decimaler ere rigtige.

LØSNING AF OPGAVERNE 311, 525.

311. Til Bestemmelsen af to Stjerners Afstand haves intet andet givet, end at de ere iagttagne samtidig i et kredsrundt Kikkertfeldt med Vinkelradius R. Der spørges om

1) den Afstand, der har størst Sandsynlighed for at være den iagttagne;
2) Middeltallet af alle mulige Afstande;
3) disse Resultaters Middelfejl.

(Hertzsprung).



Afstanden mellem to hvilke som helst Stjerner P og Q, som iagttages samtidig i det ved Figuren fremstillede Kikkertfeldt ville vi betegne ved y.

For at finde den Afstand, der har størst Sandsynlighed for at være den iagttagne, vil det først komme an paa at finde Sandsynligheden p_y for en Afstand y og derefter bestemme den Værdi af y, som gjør p_y til et Maximum.

Sandsynligheden p_y for Afstanden y er bestemt ved

$$p_y = \frac{4y\int_{\frac{1}{2}y}^{R} x\,dx \int_0^{arc\left(cos = \frac{y}{2x}\right)} d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R x\,dx \left[\int_0^{\alpha} y\,dy + \int_0^{\beta} y\,dy\right] \int_0^{2\pi} d\vartheta}, \qquad (1)$$

hvor

$$\alpha = \sqrt{R^2 - x^2\,sin^2\,\varphi} + x\,cos\,\varphi$$

og

$$\beta = \sqrt{R^2 - x^2\,sin^2\,\varphi} - x\,cos\,\varphi,$$

idet α svarer til det Tilfælde, i hvilket Stjernen Q falder paa PE, og β til det Tilfælde, at Q falder paa PF.

Udføres de antydede Integrationer, reduceres (1) til

$$p_y = \frac{16\,y}{\pi R^4} = \int_{\frac{1}{2}y}^{R} arc\left(cos = \frac{y}{2x}\right).x\,dx$$

eller

$$p_y = \frac{16\,y}{\pi R^4}\left[\frac{1}{2}\,R^2\,arc\left(cos = \frac{y}{2}\right) - \frac{y}{8}\sqrt{4R^2 - y^2}\right].$$

Heraf findes ved at anvende Reglen til Bestemmelsen af Maximum og Minimum følgende Ligning:

$$arc\left(cos = \frac{y}{2}\right) = \frac{12\,R^2 y - 3y^3}{4\,R^2\sqrt{4R^2 - y^2}} \qquad (2)$$

til Bestemmelsen af den Afstand, der har størst Sandsynlighed for at være den iagttagne.

Sættes i (2) $y = nR$, faar man

$$arc\left(cos = \frac{n}{2}\right) = \frac{3}{4}\,n\sqrt{4 - n^2}, \qquad (3)$$

som tjener til at finde n.

Denne Ligning kan imidlertid reduceres yderligere ved at sætte

$$arc\left(cos = \frac{n}{2}\right) = x, \text{ altsaa } n = 2\,cos\,x,$$

hvorved (3) forandres til

$$2x = 3\,sin\,2x,$$

Heraf findes

$$x = 65^0\,17'.25.$$

som giver

$$\frac{n}{2} = 0{,}41806$$

og altsaa

$$y = nR = 0{,}83612 \,.\, R, \tag{4}$$

der er den søgte Afstand.

Middeltallet m af alle mulige Afstande findes saaledes:

Dette Middeltal kan udtrykkes ved

$$m = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R x\,dx \left[\int_0^\alpha y^2\,dy + \int_0^\beta y^2\,dy\right]}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R x\,dx \left[\int_0^\alpha y\,dy + \int_0^\beta y\,dy\right]}, \tag{5}$$

hvor ligesom tidligere

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \varphi} + x \cos \varphi \\ \beta &= \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \varphi} - x \cos \varphi \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

og

Da Nævneren i Udtrykket for m er $\frac{1}{4}\pi R^4$, kan (5) skrives simplere saaledes:

$$m = \frac{4}{\pi R^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R x\,dx \left[\int_0^\alpha y^2\,dy + \int_0^\beta y^2\,dy\right]. \tag{7}$$

Indsættes Grændserne (6) for α og β og udføres Integrationerne med Hensyn til y og x, faar man

$$m = \frac{8R}{15\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos^2 \varphi - 6 \cos^5 \varphi + 4 \cos^7 \varphi}{\sin^4 \varphi}\,d\varphi,$$

og udføres Integrationen med Hensyn til φ, erholdes

$$m = \frac{8R}{15\pi} \left[\frac{2 - 2 \cos \varphi + \cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi} + 6 \sin \varphi - \frac{4}{3} \sin^3 \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \tag{8}$$

For den højere Grænse $\frac{\pi}{2}$ bliver Størrelsen i Parenthesen

$$\frac{2}{3} + 6 - \frac{4}{3} = \frac{16}{3},$$

og for den lavere Grænse 0 blive de to sidste Led i Parenthesen begge Nul, medens man for denne Grænse faar

$$\frac{2 - 2\cos\varphi + \cos^3\varphi}{3\sin^3\varphi} = \frac{0}{0}.$$

Den sande Værdi af dette Udtryk er imidlertid ogsaa Nul.

Det endelige Resultat bliver altsaa

$$m = \frac{8R}{45\pi}\cdot\frac{16}{3} = \frac{128R}{45\pi} = 0{,}90542\,R.$$

For at besvare det tredie Spørgsmaal, vil det alene komme an paa at finde Middelværdien μ af Kvadraterne paa alle Afstande mellem to og to Stjerner, som iagttages samtidig i Kikkertfeltet.

Denne Middelværdi kan skrives saaledes:

$$\mu = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R x\,dx \left[\int_0^a y^3\,dy + \int_0^\beta y^3\,dy\right]\int_0^{2\pi} d\vartheta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R x\,dx \left[\int_0^a y\,dy + \int_0^\beta y\,dy\right]\int_0^{2\pi} d\vartheta},$$

hvor Grænserne a og β have samme Værdier som tidligere.

Udføres Integrationerne i Tælleren med Hensyn til ϑ, y og x, og indsættes de dertil svarende Grænser, faar man, idet man tillige erindrer, at Nævneren er lig $\frac{1}{4}\pi R^4$, følgende Udtryk for μ, nemlig

$$\mu = \frac{R^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[1 + \frac{1}{3}(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) - \sin^2\varphi +$$

$$3\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Big]d\varphi.$$

Udfører man nu Integrationen med Hensyn til φ mellem Grænserne 0 og $\frac{\pi}{2}$, faar man

$$\mu = \frac{R^2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right]$$

eller

$$\mu = \frac{R^2}{\pi}\cdot\pi = R^2,$$

som er den søgte Middelværdi.

Betegnes nu Middelfejlen paa den Afstand, der har størst Sandsynlighed for at være den iagttagne, ved M_{nR}, saa har man

$$M_{nR}^2 = n^2R^2 - 2nRm + R^2 = (nR - m)^2 + R^2 - m^2,$$

og betegnes Middelfejlen paa Middeltallet af alle mulige Afstande ved M_m, har man

$$M_m^2 = a^2 - m^2.$$

Af dette sidste Resultat følger, at M_{nR} ogsaa kan skrives saaledes

$$M_{nR}^2 = (nR - m)^2 + M_m^2.$$

Benyttes de tidligere fundne Talværdier for nR og m, faar man for de to Middelfejl følgende Resultater:

$$M_{nR} = 0{,}43014 \,.\, R$$

og

$$M_m = 0{,}42452 \,.\, R.$$

(Camillo Tychsen).

525. Hvorledes løses Ligningen

$$\sqrt{abc\,(a+b+c)} + \sqrt{abx\,(a+b+x)} + \sqrt{bcx\,(b+c+x)} + \sqrt{cax\,(c+a+x)} = 0.$$

(J. P. Gram).

Sættes $a + b + c + x = y$, kan Ligningen skrives

$$\sqrt{\frac{y}{x} - 1} + \sqrt{\frac{y}{a} - 1} + \sqrt{\frac{y}{b} - 1} + \sqrt{\frac{y}{c} - 1} = 0,$$

hvoraf ved at kvadrere

$$\frac{y}{x} + \frac{y}{a} - \frac{y}{b} - \frac{y}{c} = 2\sqrt{\left(\frac{y}{x} - 1\right)\left(\frac{y}{a} - 1\right)} - 2\sqrt{\left(\frac{y}{b} - 1\right)\left(\frac{y}{c} - 1\right)}.$$

Kvadreres atter, faar man, idet

$$\frac{y}{x} + \frac{y}{a} - \frac{y}{b} - \frac{y}{c} = A,$$

$$\frac{y^2}{xa} + \frac{y^2}{xb} + \ldots \frac{y^2}{bc} = B,$$

$$A^2 - 4B + 4A - 8 = -8\sqrt{\left(\frac{y}{x} - 1\right)\left(\frac{y}{a} - 1\right)\left(\frac{y}{b} - 1\right)\left(\frac{y}{c} - 1\right)}.$$

Heraf følger

$$(A^2 - 4B + 4A - 8)^2 = 64\frac{y^4}{xabc} - 64\left(\frac{y^3}{xab} + \ldots \frac{y^3}{abc}\right) + 64B - 64A + 64,$$

$$(A^2 - 4B)(A^2 - 4B + 8A) = 64\frac{y^4}{abcx} - \frac{64y^3}{abcx}(x+a+b+c) = 0,$$

som opløser sig i

$$A^2 - 4B = 0$$

og

$$A^2 - 4B + 8A = 0.$$

Indføres Værdierne af A og B, opløse de sig yderligere i

$$(x + a + b + c)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{xa} + \frac{1}{xb} + \ldots \frac{1}{bc}\right) = 0,$$

$$x + a + b + c = 0,$$

$$(x + \ldots c)\left[\left(\frac{1}{x} + \ldots \frac{1}{c}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{xa} + \ldots \frac{1}{bc}\right)\right] + 8\left(\frac{1}{x} + \ldots \frac{1}{c}\right) = 0.$$

Den Ligning af ottende Grad, man faar ved at bortskaffe Rodstørrelserne, deler sig altsaa i en Ligning af første Grad taget tre Gange, en Ligning af anden og en Ligning af tredie Grad.

(A. S. Bang).

OPGAVER TIL LØSNING.

557. Naar U, V og W ere positive, integrable Funktioner af x i Intervallet $0 \ldots 1$, og endvidere U og $\frac{V}{W}$ ingensinde voxe med voxende x, skal man bevise, at

$$\frac{\int_0^1 UV\,dx}{\int_0^1 V\,dx} > \frac{\int_0^1 UW\,dx}{\int_0^1 W\,dx}.$$

(J. L. W. V. Jensen).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von | Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

Sjette Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1888.

FØRSTE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Alhambravej 6, Kjøbenhavn, V.

Da Tidsskriftets Udgivelse af forskjellige Grunde er bleven betydelig forsinket, ville de nærmest følgende Hefter udkomme med kun en Maaneds Mellemrum.

Red.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og **H. G. Zeuthen.**

FEMTE RÆKKE.

SJETTE AARGANG.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1889.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

FEMTE RÆKKE.

SJETTE AARGANG.

1888—1889.

Indhold.

Opgaver til Løsning.

Løste Opgaver.

Examensopgaver.

Literatur.

Oversigt over de numererede Opgaver i Tidsskriftet, som ikke ere løste:

2den Række 1ste Aargang:

Nr. 101 . . . . . . Side 16

2den Række 2den Aargang:

Nr. 127 . . . . . . Side 96
- 145 . . . . . . — 144
- 166 . . . . . . — 192

2den Række 3die Aargang:

Nr. 176 . . . . . . Side 178
- 181 . . . . . . — 179
- 200 . . . . . . — 183
- 208 . . . . . . — 184

2den Række 4de Aargang:

Nr. 227 . . . . . . Side 191

2den Række 5te Aargang:

Nr. 230 . . . . . . Side 177
- 244 . . . . . . — 180
- 261 . . . . . . — 183
- 264 . . . . . . — 184
- 271 . . . . . . — 185
- 272 . . . . . . — 185
- 274 . . . . . . — 186
- 275 . . . . . . — 186
- 277 . . . . . . — 186
- 278 . . . . . . — 187
- 279 . . . . . . — 187
- 281 . . . . . . — 187
- 283 . . . . . . — 188
- 284 . . . . . . — 188
- 285 . . . . . . — 188
- 286 . . . . . . — 188
- 287 . . . . . . — 188

2den Række 6te Aargang:

Nr. 288 . . . . . . Side 94
- 289 . . . . . . — 94

3die Række 1ste Aargang:

Nr. 292 . . . . . . Side 29
- 293 . . . . . . — 30
- 297 . . . . . . — 60
- 304 . . . . . . — 93
- 308 . . . . . . — 141
- 312 . . . . . . — 192

3die Række 2den Aargang:

Nr. 313 . . . . . . Side 78
- 314 . . . . . . — 78
- 315 . . . . . . — 78
- 319 . . . . . . — 109
- 324 . . . . . . — 141
- 330 . . . . . . — 190

3die Række 3die Aargang:

Nr. 338 . . . . . . Side 94
- 341 . . . . . . — 139
- 342 (Rettet S. 160). — 139
- 345 . . . . . . — 140
- 346 . . . . . . — 140
- 348 . . . . . . — 140
- 351 . . . . . . — 141

3die Række 5te Aargang:

Nr. 368 . . . . . . Side 152

3die Række 6te Aargang:

Nr. 376 . . . . . . Side 128

4de Række 1ste Aargang:

Nr. 379 . . . . . . Side 57
- 380 . . . . . . — 57
- 383 . . . . . . — 180
- 384 . . . . . . — 180
- 385 . . . . . . — 180

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

EN KVADRATISK TRANSFORMATION.

(af Jul. Petersen).

1. En her i Tidsskriftet stillet Opgave (Nr. 551) bragte mig paa den Tanke, at der muligvis gives en kvadratisk Transformation, ved hvilken alle rette Linier blive til Cirkler og alle eller i al Fald visse Grupper af Cirkler blive til Cirkelpar; dette kunde da muligvis medføre, at tre Cirkler med deres otte Røringscirkler kunde fremkomme ved Transformation af en Trekant med dens fire Røringscirkler. Uagtet Undersøgelsen ikke ganske har ført til det ventede Resultat, har jeg dog troet, at den kunde have nogen Interesse.

2. Idet vi benytte retvinklede Koordinater, ser man let, at den Fordring, at alle rette Linier skulle blive til Cirkler, medfører, at Transformationsligningerne maa have Formen

$$kx' = \frac{x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1}{x^2 + y^2 + ax + by + c} = \frac{S_1}{S},$$

$$ly' = \frac{x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2}{x^2 + y^2 + ax + by + c} = \frac{S_2}{S}.$$

Idet Systemerne betegnes ved A og B, se vi, at der til ét Punkt af B svarer ét Punkt af A, medens der til ét Punkt af A svarer to Punkter af B; de to Ligninger repræsentere nemlig i det andet System to Cirkelbundter, det ene bestemt ved Cirklerne $S_1 = 0$ og $S = 0$, det andet ved $S_2 = 0$ og $S = 0$. Ved et givet Punkt (x', y') bestemmes en Cirkel i hvert Bundt; de to Cirkler skjære hinanden i to Punkter; da alle Cirklerne i de to Bundter have samme Potens med Hensyn til Radikalcentret for S, S_1 og S_2,

maa de to Punkter ligge paa en ret Linie gjennem dette Punkt og have Afstande fra det med konstant Produkt.

Lad altsaa O være Radikalcentret for de tre Cirkler S, S_1 og S_2 og c dette Punkts Potens med Hensyn til de tre Cirkler. En Cirkel med O til Centrum og $\sqrt{c}$ til Radius er da de tre Cirklers Orthogonalcirkel; er denne reel, ligge af de to til et vilkaarligt Punkt af A svarende Punkter det ene udenfor, det andet indenfor Orthogonalcirklen, paa denne falde de to Punkter sammen, saa at den kommer til at svare en-entydig til en vis Kurve i Systemet A.

Tage vi O til Begyndelsespunkt, bliver $c_1 = c_2 = c$. Vi se deraf, at enhver ret Linie i A transformeres til en Cirkel, der med Hensyn til O har Potensen c, og som derfor maa skjære Orthogonalcirklen orthogonalt. Paa den anden Side kan ethvert Udtryk af Formen S_1, og hvis sidste Led er c, udtrykkes lineært ved S_1, S_2 og S, saa at enhver Cirkel med Potensen c svarer til en ret Linie i A. Altsaa:

Alle rette Linier i A svare i B til Cirkler, der skjære Cirklen om O orthogonalt, og omvendt.

Enhver anden Kurve i A maa i Almindelighed ogsaa i B give en Kurve, der skjærer den nævnte Cirkel orthogonalt, thi Røring gaar i Almindelighed over til Røring, og en Kurve og dens Tangent maa da give Kurver, der skjære under samme Vinkel; en Kurve i B, der ikke skjærer Cirklen orthogonalt, kan ikke alene svare til en Kurve i A; den maa tages sammen med sin inverse Kurve, hvor O er Inversionscentret og c Inversionspotensen; thi enhver Kurve A giver som vist ovenfor i B en Kurve, der paa Grund af Beliggenheden af de sammenhørende Punkter er sin egen inverse Kurve. Der bliver altsaa Tilfælde, hvor en Kurve i A transformeres til en Kurve i B, der ikke skjærer Cirklen om O orthogonalt, men faar Dobbeltpunkter paa denne Cirkel.

3. For saa vidt som der ved Transformationen fremkomme nye Dobbeltpunkter, maa disse falde paa Orthogonalcirklen; denne Sætning er et specielt Tilfælde af den almindelige Sætning, at nye Dobbeltpunkter, der dannes ved en Transformation af en hvilken som helst Grad, altid maa findes paa

en kun af Transformationsligningerne afhængig Kurve. Har man nemlig i homogene Koordinater

$$x' = \varphi_1 (x, y, z); \; y' = \varphi_2 (x, y, z), \; z' = \varphi_3 (x, y, z),$$

bestemmes Dobbeltpunkterne for den transformerede af $u = 0$ ved

$$\frac{du}{dx'}\frac{dx'}{dx} + \frac{du}{dy'}\frac{dy'}{dx} + \frac{du}{dz'}\frac{dz'}{dx} = 0,$$

$$\frac{du}{dy'}\frac{dx'}{dy} + \frac{du}{dy'}\frac{dy'}{dy} + \frac{du}{dz'}\frac{dz'}{dy} = 0,$$

$$\frac{du}{dx'}\frac{dx'}{dz} + \frac{du}{dy'}\frac{dy'}{dz} + \frac{du}{dz'}\frac{dz'}{dz} = 0.$$

Her maa man enten have

$$\frac{du}{dx'} = 0; \; \frac{du}{dy'} = 0; \; \frac{du}{dz'} = 0,$$

der bestemme de gamle Dobbeltpunkters transformerede, eller

$$\begin{vmatrix} \frac{dx'}{dx} & \frac{dy'}{dx} & \frac{dz'}{dx} \\ \frac{dx'}{dy} & \frac{dy'}{dy} & \frac{dz'}{dy} \\ \frac{dx'}{dz} & \frac{dy'}{dz} & \frac{dz'}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

der maa indeholde de muligvis optrædende ny Dobbeltpunkter, og som kun afhænger af Transformationsligningerne. Jeg skal ikke opholde mig ved at vise, at den sidste Ligning i det her betragtede Tilfælde netop bestemmer Orthogonalcirklen.

4. Et Keglesnit i A transformeres til en Kurve af 4de Orden med Dobbeltpunkter i Cirkelpunkterne. Skal denne dele sig i to Cirkler, maa der optræde to ny Dobbeltpunkter, og disse maa, som vi have set, falde paa Orthogonalcirklen. For at søge Betingelsen herfor, ville vi imidlertid først bringe Transformationsligningerne paa en simplere Form.

Den stillede Betingelse, at alle rette Linier i A skulle svare til Cirkler i B, vil vedblive at være opfyldt, naar vi ombytte A med et andet System, der er dannet af A ved en hvilken som helst lineær Transformation. Vi kunne derfor lade tre hvilke som helst Cirkler i B, (der blot ikke have Centrerne i samme rette Linie) svare til hvilke som helst rette Linier i A (der ikke gaa

gjennem samme Punkt); lade vi endvidere O svare til et vist Punkt i A udenfor de tre rette Linier, er Transformationen bestemt; vi vælge da to af Cirklerne med uendelig fjernt Centrum (altsaa to til de to Bundter hørende Radikalaxer), medens vi som den tredie Cirkel tage

$$x^2 + y^2 + c = 0.$$

Vi vælge de to Radikalaxer vinkelret paa hinanden og lade dem svare til de samme Linier i A, medens Cirklen svarer til den uendelig fjerne rette Linie. Transformationsligningerne blive derved

$$x' = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2 + c}; \quad y' = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2 + c};$$

Transformationen har ikke tabt noget af sin Almindelighed, naar vi sætte den i Forbindelse med den mest almindelige lineære Ændring af A. For $c = 0$ bliver Transformationen den almindelige Inversion.

Vi bestemme nu let den Kurve i A, der svarer til Orthogonalcirklen; man har nemlig

$$(x^2 + y^2 - c)^2 = (x^2 + y^2 + c)^2 - 4c(x^2 + y^2)$$
$$= (x^2 + y^2 + c)^2 \left[1 - \frac{4c}{k^4}(x'^2 + y'^2)\right].$$

Den Cirkel i A, der har Ligningen

$$x'^2 + y'^2 = \frac{k^4}{4c},$$

vil derfor svare til Orthogonalcirklen taget dobbelt. Ved en lineær Ændring bliver denne Cirkel til et Keglesnit, som vi ville kalde Grundkeglesnittet.

Dersom en Kurve i A ved Transformationen skal faa et nyt Dobbeltpunkt, maa dette hidrøre fra et Punkt, som Kurven har fælles med Grundkeglesnittet. Kurvens Tangent i dette Punkt maa da ogsaa transformeres til en Kurve med Dobbeltpunkt, det vil sige til en Cirkel med Centrum paa Orthogonalcirklen og med Radius Nul. En saadan Cirkel har Ligningen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0, \text{ hvor } a^2 + b^2 = c,$$

altsaa

$$x^2 + y^2 + c - 2ax - 2by = 0,$$

der svarer til Linien

$$ax' + by' = \frac{k^2}{2},$$

der er Tangent til Cirklen

$$x'^2 + y'^2 = \frac{k^4}{4c},$$

som netop er Grundkeglesnittet. Da den fundne Egenskab er invariant ved lineære Ændringer, have vi saaledes:

Et nyt Dobbeltpunkt hidrører fra et Røringspunkt, som den transformerede Kurve har med Grundkeglesnittet og omvendt.

Heraf følger da strax:

De Keglesnit (og ingen andre), som have dobbelt Røring med Grundkeglesnittet, transformeres til Cirkelpar.

5. Har man tre Cirkler og deres otte Røringscirkler, ville disse netop parvis skjære hinanden paa de tre Cirklers Orthogonalkeglesnit. Systemet vil derfor i A svare til tre rette Linier med fire Røringskeglesnit, der alle have dobbelt Røring med Grundkeglesnittet. Spørgsmaalet er da, om Forbindelsen kan vælges saaledes, at de fire Keglesnit blive Cirkler. Grundkeglesnittet kan da ikke være en Cirkel, da to Cirkler kun have dobbelt Røring, naar de ere koncentriske.

Lad en Cirkel røre et Keglesnit i Punkterne P og Q. Skjære Tangenterne i P og Q hinanden i R, bliver $RP = RQ$; Linien fra R gjennem Midtpunktet af PQ er en Diameter i Keglesnittet og staar vinkelret paa det tilsvarende, med PQ parallele Kordesystem; dette finder kun Sted, naar Diameteren er en Hovedaxe; de dobbelt rørende Cirkler maa derfor have deres Centrum paa Grundkeglesnittets Hovedaxer.

Dette ser ganske lovende ud, thi de fire Centrer for en Trekants Røringscirkler ligge netop paa to paa hinanden vinkelrette Linier gjennem en af Trekantens Vinkelspidser; et Par saadanne Linier maatte derfor være Axer for Grundkeglesnittet. Nu have de to af Cirklerne Toppunktet, der skal være Keglesnittets Centrum, til ydre Lighedspunkt; man viser imidlertid let, at to saadanne Cirkler kun kunne have dobbelt Røring med Keglesnittet, naar dette er sammensat af to af Trekantens Sider; nu kan imidlertid Grundkeglesnittet ikke være sammensat. Det er derfor umuligt

ved en Transformation af den betragtede Art at overføre de tre Linier til tre Cirkler og samtidig alle fire Røringscirkler til de fire Par af Røringscirkler. Derimod kan man nok finde Transformationer, der overføre en af Trekantens Røringscirkler til et Cirkelpar. Der findes her en Overensstemmelse med de sædvanlige Konstruktioner af de otte Røringscirkler, idet man ved disse ogsaa bestemmer Røringscirklerne parvis.

Man finder ogsaa, idet $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ ere Ligningerne for tre Cirkler, disses Røringscirkler ere bestemte ved

$$\sqrt{t_1 s_1} + \sqrt{t_2 s_2} + \sqrt{t_3 s_3} = 0,$$

hvor t_1, t_2, t_3 ere Længderne af de tre Cirklers Fællestangenter; eftersom disse tages som indre eller ydre, faas de forskjellige Cirkelpar. (Se f. Ex. en Afhandling af Elling Holst om Dupins Cyclide).

6. Den her betragtede Transformation danner en naturlig Udvidelse af de Cremonaske Transformationer af anden Orden; medens der ved disse benyttes tre Grundkeglesnit med tre faste Skjæringspunkter, have vi her, naar Transformationen opfattes projektivisk, tre Grundkeglesnit gjennem to faste Punkter, som mere almindelig kunne erstattes ved andre Kurver med to bevægelige Skjæringspunkter. Disse Transformationer ere først indgaaende behandlede af Paolis. (Atti della Academia dei Lincei).[1])

ANMÄRKNINGAR OM DUBBELELEMENTEN VID PROJEKTIVISKA RAKA PUNKTSYSTEM OCH PLANA STRÅLKNIPPEN.

(AV T. BRODÉN).

Följande enkla anmärkningar torde möjligen icke sakna allt intresse.

Om två rätliniga, projektiviskt motsvariga punktsystem läggas på hvarandra, falla som bekant två (reela eller imag.) punkter

[1]) Grundtræk af den almindelige Theori samt enkelte Anvendelser findes allerede i min Afhandling i dette Tidsskrifts Aargang 1863, S. 129—160
Zeuthen.

samman med sina motsvariga. Huru röra sig dessa dubbelpunkter, då det ena systemet förskjutes längs det andra?

Antaga vi först, att de båda liniernas oändlighetspunkter icke motsvara hvarandra, så kan den projektiviska korrespondensen uttryckas medelst formeln

$$xx_1 = a^2,$$

om nämligen nollpunkterna (O, O_1) för koordinaterna x och x_1 förläggas till de punkter, av hvilka hvardera motsvarar det andra systemets ∞-punkt, och dessutom de positiva x- och x_1-riktningarne väljas på lämpligt sätt.

Man kan lägga de bägge systemen på hvarandra antingen så, att den positiva x_1-riktningen sammanfaller med den positiva x-riktningen, eller så att positiv x_1-riktning och negativ x-riktning sammanfalla. I förra fallet må applikationen kallas direkt, i senare fallet indirekt.

Lägger man nu x_1-linien på x-linien direkt och så att O_1 faller på O, så blifva dubbelpunkterna tydligen $x = \pm a$ (A, B). Förskjuter man derefter O_1 och dermed hela x_1-systemet ett positivt eller negativt stycke p, så vandra dubbelpunkterna till de lägen, som bestämmas av ekv. $x(x-p) = a^2$. Deras x-värden δ_1 och δ_2 bliva således

$$\delta_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{p^2 + 4a^2} + p) = \frac{2a^2}{\sqrt{p^2 + 4a^2} - p},$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{p^2 + 4a^2} - p) = -\frac{2a^2}{\sqrt{p^2 + 4a^2} + p}.$$

När p växer från 0 till $+\infty$, gå δ_1 och δ_2 resp. från a till $+\infty$ och från $-a$ til 0; när p går frän 0 till $-\infty$, varierar δ_1 från a till 0, δ_2 från $-a$ till $-\infty$. För övrigt är att märka, att $\sqrt{p^2 + 4a^2}$ tydligen betyder avståndet (r) mellan dubbelpunkterna.

Om x_1-liniens föskjutning försiggår på något bestämdt sätt, d. v. s. om p är en viss funktion av tiden (t) så bestämmas dubbelpunkternas hastigheter och accelerationer av ekvationerna

$$\frac{d\delta_1}{dt} = \frac{\delta_1}{r}\frac{dp}{dt}, \quad \frac{d^2\delta_1}{dt^2} = \frac{2a^2}{r^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \frac{\delta_1}{r}\frac{d^2p}{dt^2},$$

$$\frac{d\delta_2}{dt} = -\frac{\delta_2}{r}\frac{dp}{dt}, \quad \frac{d^2\delta_2}{dt^2} = -\frac{2a^2}{r^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 - \frac{\delta_2}{r}\frac{d^2p}{dt^2}.$$

I det enklaste fallet, om förskjutningshastigheten (h) är konstant, medgiva dessa ekvationer en ganska enkel tolkning. Man har då $\frac{dp}{dt} = h$, $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$, och dubbelpunkterna röra sig tydligen på samma sätt som två fritt rörliga materiela molekyler, hvardera med massan 1, hvilka repellera hvarandra med en kraft, som är omvändt proportionel mot avståndets 3:dje dignitet samt vid avståndet 1 lika med $2a^2h^2$, och hvilka vid avståndet $2a$ erhållit en och samma begynnelsehastighet $\frac{1}{2}h$ i samma (utefter sammanbindningslinien gående) riktning.

Vid indirekt applikation med O_1 på O bliva dubbelpunkterna $x = \pm ai$ ($i = \sqrt{-1}$). Efter en förskjutning p (positiv i den positiva x-riktningen) av x_1-linien bestämmas de av ekvationen $x(x-p) + a^2 = 0$ och förbliva således imaginära, så länge p är numerisk mindre än $2a$. När p går från $+2a$ till $+\infty$, röra de sig resp. från $x = a$ till $x = \infty$ och från $x = a$ till $x = 0$; deremot från $-a$ till $-\infty$ och från $-a$ till 0, då p går från $-2a$ till $-\infty$.

Vi sätta liksom nyss $p = ht$ och betrakta först fallet $p^2 < 4a^2$. Då är

$$\left.\begin{matrix}\delta_1\\ \delta_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{ht \pm i\sqrt{4a^2 - h^2t^2}\right\}.$$

Representera vi, på vanligt sätt, komplexa x-värden medelst punkter i ett genom x-linien lagdt plan, så ser man lätt, huru de mot δ_1 och δ_2 svarande punkterna röra sig vid x_1-liniens likformiga förskjutning. Sätter man $\delta_1 = \xi_1 + i\eta_1$, $\delta_2 = \xi_2 + i\eta_2$, så gälla likheterna

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}ht, \quad \eta_1 = -\eta_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - h^2t^2},$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{1}{2}h, \quad -\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{d\eta_2}{dt} = \frac{h^2t}{2\sqrt{4a^2 - h^2t^2}},$$

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = 0, \quad -\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = \frac{d^2\eta_2}{dt^2} = \frac{2a^2h^2}{(\sqrt{4a^2 - h^2t^2})^3}.$$

Tydligen är avståndet mellan dubbelpunkterna $= 2\eta_1 = \sqrt{4a^2 - h^2 t^2}$, och deras rörelse skulle, om hvardera hade massan 1, framkallas av en ömsesidig attraktion, omvändt proportionel mot avståndets 3:dje dignitet och på avståndet 1 lika med $2a^2h^2$, förutsatt tillika, att vid tiden $t = 0$ följande betingelser vore uppfylda: $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $\eta_1 = a$, $\eta_2 = -a$, $\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{1}{2}h$, $\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{d\eta_2}{dt} = 0$. De båda punkternas bana är, såsom man lätt finner cirkulär; hvardera genomlöper under tiden från $t = 0$ till $t = \frac{2a}{h}$ en kvadrant av cirkeln $\xi^2 + \eta^2 = a^2$. Hastighetskomponenten längs ξ-axeln är för bägge konstant $= \frac{1}{2}h$, η-komponenterna äro numeriskt lika och växa numeriskt, tills punkterna för $p = 2a$ med oändligt stora hastigheter sammanstöta i $x = a$ (eller i $x = -a$ för $p = -2a$). Men i samma ögonblick flyga de också med oändligt stora hastigheter i sär, δ_1 i den positiva, δ_2 i den negativa riktningen av den reela x-linien, om vi hålla oss till fallet $h > 0$. Rörelsen, bestämd av likheterna

$$\left.\begin{matrix}\delta_1\\ \delta_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(ht \pm \sqrt{h^2t^2 - 4a^2}) = \frac{1}{2}(ht \pm r),$$

($r =$ avståndet), kommer tydligen fortfarande att kunna härledas ur den attraktiva kraften $\frac{2a^2h^2}{r^3}$, men är icke längre symmetrisk. Begynnelsevilkoren kunna uttryckas så: vid ett godtyckligt litet avstånd ε (d. v. s. för $ht = \sqrt{4a^2 + \varepsilon^2}$) skola följande likheter gälla:

$$\delta_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{4a^2 + \varepsilon^2} + \varepsilon), \quad \delta_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{4a^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon),$$

$$\frac{d\delta_1}{dt} = \frac{h}{2}\left\{\sqrt{1 + 4\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2} + 1\right\}, \quad \frac{d\delta_2}{dt} = -\frac{h}{2}\left\{\sqrt{1 + 4\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2} - 1\right\}.$$

I stället för att betrakta dubbelpunkternas rörelse vid liniernas förskjutning längs hvarandra, kan man naturligtvis inskränka sig till att blott fråga efter deras olika möjlige lägen. Frågan kan då tydligen uttryckas så: för hvilka x-punkter Y gäller det, att avståndet till en given punkt X förblir oförändradt vid den projek-

tiviska transformationen $(X_1 Y_1 = XY)$? Det måste i allmänhet finnas två sådana punkter, den ena motsvarande direkt, den andra indirekt applikation. Om x och y äro koordinaterna för den givna och den sökta punkten, böra de således antingen vara rötter till ekv. $\xi(\xi - p) = a^2$ (dir. appl.) eller till $\xi(\xi - p) = - a^2$, d. v. s.

$$xy = \mp a^2.$$

Den mot direkt applikation svarande Y-punkten är alltså densamma, som vid indirekt applikation med O_1 på O projektiviskt motsvarar punkten X, och tvärtom; eller, hvilket är detsamma: $y = \mp x_1$. De tillhörande p-värdena äro $\frac{x^2 \mp a^2}{x}$.

Till samma resultat kommer man också medelst ekv.

$$x - y = \pm \left(\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{y}\right),$$

som är ett omedelbart uttryck för frågan i den nyss anförda formen.

Vi hava hittills uteslutit det fall, att de oändliga x- och x_1-punkterna motsvara hvarandra.

Sedan man i detta fall tagit ett godtyckligt x-origo (O) samt en godtycklig positiv x-riktning, kan man välja x_1-origo (O_1) och positiv x_1-riktning så, att transformationsformeln blir

$$x_1 = ax, \qquad a > 0.$$

Vid direkt applikation (pos. x_1 utefter pos. x) med O_1 på O blir den ändliga dubbelpunkten tydligen just O; efter en (pos. eller neg.) förskjutning p skall dess abscissa δ satisfiera $\delta - p = a\delta$, d. v. s.

$$\delta = \frac{p}{1 - a}.$$

Vid konstant förskjutningshastighet h rör sig således även dubbelpunkten likformigt, nämligen med hastigheten $\frac{h}{1 - a}$. Om $a < 1$ går den således i samma riktning som förskjutningen, men hastigare än denna. För $a > 1$ rör den sig i motsatt riktning med en hastighet, som är numeriskt $\lesseqgtr h$, allt efter som $a \lesseqgtr 2$. Om $a = 1$, äro x_1-systemen kongruenta, och för $p = 0$ är hvarje x-punkt dubbelpunkt, men för $p \gtrless 0$ ingen ändlig punkt.

Vid indirekt applikation med O_1 på O och derpå följande förskjutning kommer dubbelpunkten att bestämmas av ekvationen

$$\delta = \frac{p}{1 + a},$$

och den rör sig således alltid i samma led som förskjutningen men med mindre hastighet.

Vi övergå nu att betrakta strålknippen. Transformationsformeln kan vid dem alltid bringas till formen

$$tg\, \alpha \,.\, tg\, \alpha_1 = m^2,$$

om nämligen α och α_1 betyda de vinklar, som motsvarande individer bilda med tvänne initialstrålar OX och O_1X_1, av hvilka hvardera motsvarar den mot den andra vinkelräta strålen, och om tillika de positiva riktningarne för α och α_1 väljas på passande sätt. Om systemen icke äro kongruenta ($m = 1$) finnes det tydligen alltid två och blott två mot hvarandra vinkelräta α-strålar, hvilkas motsvarande α_1-strålar också skära hvarandra vinkelrätt. Vi kunna alltid välja OX så, att $m^2 < 1$, hvilket i det följande förutsättes.

Knippenas applikation på hvarandra innebär naturligtvis, att deras basispunkter (O, O_1) och plan sammanfalla. Vi säga, att applikationen är direkt eller indirekt, allteftersom positiv α-riktning överensstämmer med positiv α_1-riktning eller icke.

Om vid direkt applikation initialstrålarna sammanfalla, bestämmas dubbelstrålararna av ekv. $tg^2 \delta = m^2$ och ligga således symmetriskt till OX. Sedan man vridit α_1-systemet en vinkel φ, gäller deremot ekv.

$$tg^2\, \delta - (1 + m^2)\, tg\, \varphi\, tg\, \delta - m^2 = 0,$$

och tangenten för vinkeln mellan dubbelstrålarna är

$$\pm \frac{\sqrt{(1 + m^2)^2\, tg^2\, \varphi + 4 m^2}}{1 - m^2}.$$

Den spetsiga vinkeln växer således till dess $\varphi = 90^0$, då strålarna äro vinkelräta mot hvarandra, derefter minskas den, tills den för $\varphi = 180^0$ åter får det ursprungliga värdet $2\ arc\ tg\ m$, o. s. v. För övrigt inser man utan svårighet, att bägga strålarna vrida sig i samma riktning som α_1-systemet (jfr. strax nedan).

Skärningspunkterna mellan dubbelstrålarna och en rät linie L, som skär OX vinkelrätt på avståndet 1 från O, röra sig enligt ekvationen strax ovan så, att de ständigt ligga på hvar sin sida om OX, och rektangeln av deras avstånd derifrån är konstant $= m^2$. Även finner man lätt, att om vridningen utföres så, att skärningspunkten mellan O_1X_1 och linien L rör sig med konstant hastighet h ($tg\,\varphi = ht$), dubbelpunkterna röra sig så, som om de vara materiela partiklar med massan 1 och repellerade hvarandra med en mot avståndets 3:dje dignitet inverse proportionel kraft, hvarvid tillika förutsättes, att vid tiden $t = 0$ hvardera punkten har hasigheten $\frac{1}{2} h (1 + m^2)$ samt att kraften på avståndet 1 är lika med $2m^2 (1 + m^2)^2 h^2$. Man har nämligen

$$tg\,\delta = \frac{1}{2}\left\{(1 + m^2)\,tg\,\varphi \pm \sqrt{(1 + m^2)^2\,tg^2\,\varphi + 4m^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(1 + m^2)\,ht \pm r\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\,tg\,\delta = \frac{1}{2}\left\{(1 + m^2)\,h \pm \frac{(1 + m^2)^2\,h^2 t}{r}\right\},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\,tg\,\delta = \pm\frac{2m^2 (1 + m^2)^2\,h^2}{r^3}.$$

Vid indirekt applikation med O_1X_1 utefter OX har man $tg\,\delta = \pm\,im$. Dubbelstrålarna bliva reela, först sedan a_1-systemet vridits en vinkel $2\,arc\,tg\,m$ (låt vara i positiv led). Mot vridningen φ svarar nämligen ekv.

$$tg^2\,\delta - (1 - m^2)\,tg\,\varphi\,tg\,\delta + m^2 = 0,$$

$$tg\,\delta = \frac{1}{2}\left\{(1 - m^2)\,tg\,\varphi \pm \sqrt{(1 - m^2)^2\,tg^2\,\varphi - 4m^2}\right\}.$$

För $\varphi = 2\,arc\,tg\,m$ bildar den dubbla dubbelstrålen vinkeln $arc\,tg\,m$ med OX; vid fortsatt vridning vrida sig dubbelstrålarna i motsatt led och sammanfalla åter för $\varphi = 180^0 - 2\,arc\,tg\,m$, numera bildande vinkeln $= arc\,tg\,m$ med OX. Vid godtyckligt φ har tangenten för vinkeln mellan dubbelstrålarna värdet

$$\frac{\sqrt{(1 - m^2)^2\,tg^2\,\varphi - 4m^2}}{1 + m^2}.$$

Skärningspunkterna mellan dubbelstrålarna och linien L röra sig, om $tg\,\varphi = ht$, såsom i det analoga fallet vid raka systems förskjutning på hvarandra; dock bör den attraktiva kraften på avståndet 1 nu vara $2m^2(1 - m^2)^2 h^2$, liksom också hastigheternas begynnelsevilkor något modifieras.

De strålar (β) i α-knippet, som jämte en given stråle (α) kunna bliva dubbelstråler, om de bägge knippena på lämpligt sätt läggas på hvarandra, bestämmas, såsom den föregående framställningen visar, av ekv.

$$tg\,\alpha\,tg\,\beta = \mp m^2,$$

hvarest det övre tecknet motsvarar direkt, det undre indirekt applikation.

Till föregående enkla undersökning må fogas den anmärkningen, att motsvarande förhållanden vid plana punktsystem och strålknippen i rymden av naturliga skäl gestalta sig ojämförligt mindre enkelt, samt att huvudintresset dervidlag torde falla på ernåendet av en åskådlig föreställning om de 3 dubbelelementens olika möjlige lägen (hvilket ju icke förutsätter, att man gör sig fullständigare reda för deras rörelse vid systemens lägeförändring). En dylik föreställning är i själva verket ganska lätt att vinna. Möjligen torde förf. vid annat tillfälle återkomma till dessa frågor.

PRINCIPET AF DEN MINDSTE MODSTAND.

(AF P. VEDEL).

Efter først i Philosoph. Magazine Octob. 1833 at have opstillet dette for de løse Systemer saa vigtige Theorem, baserede Moseley i „The mechanical principles of Engineering and Architecture“, London 1843, en Jordtryks- og en Hvælv-Theori derpaa, og senere byggede Rankine („On Stability of loose Earth“ i Phil. Trans. 1857, ogsaa i „A Manual of applied Mechanics“ London 1861) og Scheffler (først i hans tydske Bearbejdelse af Moseley's Principl. of Engin. 1845, senere i hans

„Theorie der Gewölbe und Futtermauern“ Braunschweig 1857) videre paa det samme, for den sidstes Vedkommende dog noget modificerede Princip, for hvilket navnlig han forsøgte at levere exakte Beviser.

Moseley udtrykker dette nye statiske Theorem, hans „principle of least resistance“ paa følgende Maade: Naar et System af Kræfter er i Ligevægt, og deriblandt findes et Antal Reaktioner, saa er enhver af disse sidste, med Hensyn til de Betingelser, som hele Systemet er underkastet, et Minimum. Hans Bevis er imidlertid hverken ganske korrekt eller fyldestgjørende, og selve Sætningen, som i mange Tilfælde er uklar og ufuldstændig, er i sin Almindelighed heller ikke uangribelig.

Rankine gik ud fra, at de passive Kræfter udvikles efterhaanden som en Virkning af de aktive, men at de efter saaledes sukcessive at være voxede, indtil de netop kunne konstituere en Ligevægtstilstand, ikke yderligere ville forøges udover disse deres mindste mulige Intensiteter; han forandrede senere sin Opfattelse derhen, at det er det totale Arbejde af disse Reaktioner ved en infinitesimal Ligevægtsforstyrrelse, der vil være et Minimum.

Først Scheffler gjorde imidlertid opmærksom paa den Ubestemthed, som Theoremet rummer, og pointerer dette stærkt i Bevisførelsen for det i dets modificerede Form, ɔ: de paa Resultanten af alle de aktive Kræfter vinkelrette Komposanter af Reaktionerne ville være Minimum. Hans Ræsonnement er i Korthed følgende. Betragtes et System af, maaske kun ved indbyrdes Attraktion, forbundne Legemer (molekulære Partikler), paavirkede af visse aktive Kræfter, hvis Resultant er Π (Fig. 1), og Reaktioner, R, fra et Antal faste Understøtninger Aa, saa ere for det første disses Angrebspunkter A paa Understøtningsfladerne ubestemte, og dernæst kunne deres Retninger variere, saa at Komposanten Q, svarende til en Opløsning af R parallel med og vinkelret paa Π, drejer sig i den paa Π vinkelrette Plan. Ere imidlertid de sidste Ubestemtheder fjernede ved andre Betragtninger, saa lærer nærværende Princip, at af alle Systemer af Modstande, hvis Komposanter Q ere henholdsvis parallele med Q_1, Q_2 . . ., gjennem alle

mulige Punkter A, af de givne Vederlagsflader, kan kun det virkelig indtræde, for hvilket samtlige Komposanter Q ere saa smaa som muligt. Og dog indeholder atter dette en Ubestemthed, idet der maaske ikke findes et enkelt System, hvor alle Q'erne samtidig antage deres absolut mindste Værdier, men flere saadanne, hvor nogle Q'er ere mindre, andre større, og som med lige Ret maa antages mulige. For at bevise dette, tænkes kun Vederlagsfladerne Aa bevarede, men de understøttende Legemer fjernede, og i Stedet derfor anbringes faste, uelastiske Stænger $MN \neq \Pi$ og $Ma \neq Q$ og i uforanderlig Forbindelse dermed andre aa; der vil da i disse Stænger fremkomme Spændinger, som i MN er $\Pi = \Sigma P$ og i Ma_1 er Q_1 etc., og det uafhængig af deres Modstandsevne, idet Reaktionerne R kun afhænge af de givne Legemers Natur og Overfladen af Vederlagene Aa. Gives derfor Stængerne en til disse Spændinger svarende eller en endnu større Styrke, vil Ligevægten bibeholdes; men gjøres de alle svagere, saa at de netop kunne modstaa visse andre Spændinger $Q' < Q$, saa ville de alle brydes, og Ligevægten altsaa forstyrres. Svare nu imidlertid Komposanterne $Q' \neq Q$ til et andet muligt Ligevægtsystem, saa maa Stængerne alligevel kunne vedligeholde Ligevægten og kunne altsaa ikke sønderbrydes, og følgelig maa de virkelig existerende Kræfter Q være de mindste mulige. Ere imidlertid ikke alle $Q' < Q$, men f. Ex. $Q'_2 > Q_2$, saa vil ved Sønderbrydningen af nogle af Stængerne ikke alle samtidig komme til at udøve Reaktionerne Q', og idet Beviset da ikke gjælder mere, vil den ovenomtalte Ubestemthed være tilstede.

En umiddelbar Følge af Principet er det, at naar Systemets og de givne Støttepunkters Natur tillader det, ville Reaktionerne være $\neq \Pi$ (ɔ: $Q = 0$); men kan der kun ydes Modstand i visse andre Retninger, eller virke visse indre Kræfter, saa maa der ogsaa optræde et System af Kræfter Q, der for hvert Punkt A giver R en Retning, hvori der kan præsteres Reaktion. Opløses nu imidlertid disse R (Fig. 2) i Komposanter, p og q, saa at $p_1, p_2 \ldots \neq \Pi$ ere de Reaktioner, der i første Tilfælde vilde fremkaldes, saa vil for hvert Punkt A Kræfterne R, P, Q, p, q ligge i en Plan, og,

ligesom p'erne og Π, ville ogsaa q'erne indbyrdes være i Ligevægt; men er endvidere, ligesom p's Retning og Størrelse, ogsaa q's Retning bestemt, saa vil til Minimum af Q ogsaa svare Minimum af q eller af $\angle RAP$, og derefter kan under disse Forudsætninger Principet udtales saaledes: Vinklerne mellem Modstandene og Retningen af Resultanten, Π, ville være Minimum.

Indeholder Systemet 1 Støttepunkt, er $Q = 0$, R lig og modsat Π; indeholder det 2 saadanne, virker $q_1 = - q_2$ i Forbindelseslinien $\overline{A_1 A_2}$, og er der 3, ville q_1, q_2, q_3 alle ligge i Planen $A_1 A_2 A_3$ og skjære hinanden i samme Punkt; er der endelig 4 eller flere Understøtningspunkter, fremtræde de nævnte Ubestemtheder ved Theoremet.

Mod denne Scheffler's Theori kan der imidlertid rejses en Del Indvendinger, og navnlig er hans Paastand om Trykfordelingens Uafhængighed af Understøtningernes Modstandsevne og Kombinationen af den mekaniske Forestilling om Brud med saadanne mathematiske Abstraktioner som fuldstændig uelastiske, usammentrykkelige faste Legemer af en temmelig tvivlsom Natur. Ere Legemerne og Understøtningerne elastiske, det eneste der i Anvendelserne har Betydning, vil det givne Bevis ikke gjælde mere, og den Modifikation deraf, som Scheffler for dette Tilfælde indfører, er ingenlunde fyldestgjørende. Medens de Saint-Venant (Comptes Rendus 1870) væsentlig kritiserer Anvendelsen af Principet og den kun betingede Overensstemmelse mellem Rankine's derved fundne og de af Maurice Levy paa Cauchy's Theoremer baserede Jordtryksformler, er fra anden Side (v. Reiche i Zeuner's Civilingenieur Bd. VII) selve Theoremet blevet stærkt angrebet og underkastet en senere Behandling i Weisbach's Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Det er kun i Tilfælde, hvor de 6 Ligevægtsligninger mellem Kræfter og Reaktioner ikke ere tilstrækkelige til disses Bestemmelse, at Principet af den mindste Modstand faar Betydning ved at levere en yderligere Betingelse, der skal erstatte vort manglende Kjendskab til de indre molekulære Virksomheder og altsaa maa baseres paa en Hypothese om disse. Som saadan antager i Virkeligheden Scheffler lige saa vel som Rankine en sukcessiv Udvikling af Reak-

tionerne, og det herpaa byggede Theorem prætenderer da at give de virkelig existerende, ikke de til en Grænse-Ligevægtstilling svarende Tryk, noget der dog i Almindelighed har mere theoretisk end egentlig praktisk Betydning. Jeg skal nu forsøge at paavise, hvorledes Principet paa Grundlag af en tilsyneladende lidt anden Forudsætning kan udledes i en noget modificeret Form.

Betragtes nemlig elastiske (eller stive, forsaavidt man med Clebsch betragter Stivheden som en Grænsetilstand), af Molekuler bestaaende Legemer, understøttede i et Antal Punkter eller Fladeelementer ved elastiske eller uelastiske Vederlagsmasser, og antages det, at den i Berøring med Vederlaget værende Partikel, naar dette fjernes, i første Øjeblik vil bevæges af en Kraft lig og modsat Reaktionen, noget der tør anses for en meget plausibel Hypothese ved saadanne Legemer, sammentrykkede eller strakte (maaske bøjede) som de maa være svarende til R, saa vil Principet kunne udledes som en direkte Konsekvens af Gauss' Tvangslov. Opløses Resultanten Π af alle de ydre Kræfter i dermed parallele Komposanter p (Fig. 3) gjennem Støttepunkterne A og Trykkene i disse R i de samme Kræfter p og et System af andre, q, saa maa alle disse q'er, da $\Sigma_{\text{stat.}}\, p = \Pi$, tilsammen holde hinanden i Ligevægt. Dersom nu ikke Systemet var bundet ved mulig tilstedeværende indre Spændinger og dets egen eller Understøtningernes særegne Natur, saa vilde ved disses Fjernelse Molekulerne A bevæges af Kræfterne p, lige store med og modsatte de i saa Fald optrædende Reaktioner; men Understøtningerne have fremkaldt en Tvang ved de frembragte Kompressioner (Extensioner) i Retningerne q, og denne Tvang vil nu bevirke, at A bevæges af Kraften R i Stedet for af p. Men følgelig kunne Molekulerne A_1, A_2 . . . betragtes som et System af indbyrdes forbundne Partikler, for hvilke p ere de ydre Kræfter, R de effektive og $-q$ de paa Grund af Tvangen tabte; d'Alembert's Princip vil være tilfredsstillet, $\Sigma_{\text{stat.}}\,(-q) = 0$, og Gauss' Theorem giver: $\Sigma \left(\frac{1}{2}\, q t^2\right)^2 =$ Min., hvoraf:

$$\Sigma\, q^2 = \text{Min.},$$

der under Forudsætning af Formforandringernes Proportionalitet med de virkende Kræfter vil kunne udtrykkes som Principet af det mindste Arbejde.

Det er herved forudsat, at p'erne have bestemte Værdier, i modsat Fald ville de af Scheffler fremhævede Ubestemtheder atter optræde her, idet for ethvert System af p'er de tilsvarende q'er skulle opfylde Minimumsbetingelsen. Ved at opløse Π i et hvilket som helst andet System af ikke parallele Kræfter, $\tilde{\omega}$, som vilde repræsentere Trykkene, saafremt kun nogle af Tvangsbetingelserne vare tilstede, vilde man paa lignende Maade kunne finde $\Sigma\varrho^2 = \text{Min.}$, som udtrykker, at de øvrige Betingelser ville frembringe Komposanter ϱ, hvis Kvadratsum er Minimum. Dannes Understøtningerne ikke af Punkter men af Flader, og kjendes for hver af disse Angrebspunktet af de elementære Reaktioners Resultant, saa vil man atter for Komposanterne q af disse Resultanter finde Theoremet gjældende, idet da blot hver Vederlagsflade betragtes som et hele; kjendes derimod ikke Angrebspunkterne, maa hver Molekule betragtes som en Understøtning for sig.

For kun 1 Understøtningspunkt giver Ligevægtsbetingelsen: $q = 0$, for 2 saadanne faas af denne og Minimumsbetingelsen: $q_1 = -q_2 = \text{Min.}$; for 3 endelig maa q_1, q_2, q_3 ligge i Planen $A_1 A_2 A_3$, gaa gjennem samme Punkt og danne en lukket Kraftpolygon (Fig. 4), der stedse forbliver ligedannet, naar q'ernes Retninger ikke forandres, og Minimumsfordringen til Σq^2 vil da være identisk med Betingelsen $q_1 = \alpha q_2 = \beta q_3 = \text{Min.}$ I alle tre Tilfælde, de for Anvendelserne vigtigste, er altsaa Principet det samme som Scheffler's, og det vil ogsaa let indses, at den opstillede Hypothese i Virkeligheden ikke er meget forskjellig fra den om en sukcessiv Udvikling af Trykkene, idet disse sukcessive ville voxe med den voxende Kompression.

Der er imidlertid et Forhold, der vel er værdt at lægge Mærke til, og som faar stor Betydning ved Anvendelsen af Principet saavel i den ændrede som i den af Scheffler opstillede Form, nemlig Indflydelsen af den Maade, hvorpaa Systemet oprindelig er anbragt i den Stilling, det har, idet der herved kan være indbragt

deri visse indre Spændinger, hvorved nogle af Reaktionerne underkastes specielle Betingelser, men om hvilke man ikke kjender Besked uden at kjende Anbringelsesmaaden; ere de givne, giver Principet atter den rigtige Løsning, men ere de ubekjendte eller tages de ikke med i Beregningen, giver det falske Resultater. Dog vil hyppig Rystelser og de ved saadanne fremkomne infinitesimale Bevægelser ophæve disse Spændinger og tilvejebringe de normale Forhold.

Principets Anvendelse i Hvælv- og Jordtrykstheorien er det ikke her Stedet at gaa nærmere ind paa (Indvendinger i Westphal og Foeppl's Udgave af Navier's Baumechanik); derimod skal jeg tillade mig ved Hjælp deraf lidt nærmere at behandle et Exempel af Prof. Jul. Petersen's Statik (Opgave 103), som for nylig Prof. Zeuthen i dette Tidsskrifts 6te Hefte Aarg. 1886 har benyttet til at akcentuere Forskjellen mellem de „faktiske Gnidningskoefficienter“ og de som „Gnidningskoefficienter“ i daglig Tale betegnede største Værdier af disse.

En homogen Stang AB (Længde $= 2l$, Vægt $= V$) støtter mod den horizontale Plan OA og den vertikale OB (Fig. 5), Friktionskoefficienterne (de største) ere $\mu = tg\,\varphi$ og $\mu_1 = tg\,\varphi_1$, Grænseligevægtstillingen ($v_{min.}$) søges.

For Almindeligheds Skyld antages, at Stangen er anbragt med en vis Begyndelsesspænding L, R og R_1 ere de faktiske Reaktioner, r og r_1 Resultanterne af L og $\frac{V}{2}$, samt ϑ, ϑ_1 og α, α_1 de respektive Vinkler med Planerne. Idet Figuren let giver:

$$2\,tg\,v = tg\,\vartheta - cot\,\vartheta_1,$$

faas Grænseværdien $v_{min.}$ for $tg\,\vartheta =$ Min. og $cot\,\vartheta_1 =$ Max., altsaa for ϑ og ϑ_1 saa smaa som muligt. Da der imidlertid for Ligevægt nødvendigvis af Planerne maa udøves Tryk i Retning af Stangen, som ere $\gtreqqless L$, maa altid:

$$\vartheta \leqq \alpha \quad \text{og} \quad \vartheta_1 \geqq \alpha_1 = arc\,tg\,\frac{L\,cos\,v}{\frac{V}{2} - L\,sin\,v},$$

og følgelig

$$\vartheta_{\min.} = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \vartheta_{1\min.} = \begin{cases} \alpha_1 > \frac{\pi}{2} - \varphi_1, \\ \frac{\pi}{2} - \varphi_1 > \alpha_1, \end{cases}$$

hvoraf umiddelbart følger

$$tg\, v_{\min.} = \frac{1 - \mu\mu_1}{2\mu} \text{ naar } L < \frac{V}{2(\mu_1 \cos v + \sin v)},$$

medens man ved Indsætning i Udtrykket $tg\, v = \frac{1 - \mu \,.\, \cot \alpha_1}{2\mu}$ af Værdien af $\cot \alpha_1$, faar en Ligning til Bestemmelse af $v_{\min.}$:

$$\cos v_{\min.} - \mu \sin v_{\min.} = \frac{\mu V}{2L}, \text{ naar } L > \frac{V}{2(\mu_1 \cos v + \sin v)}.$$

Skjønt den egentlige Opgave hermed er løst, skal dog endnu de til et givet v svarende faktiske Reaktioner og Gnidningsmodstande bestemmes ved Hjælp af Principet af den mindste Modstand, der lærer, at Vinklerne ϑ og ϑ_1 ville afvige saa lidt som muligt fra α og α_1, idet dog stedse $\vartheta \geqq \frac{\pi}{2} - \varphi$ og $\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \leqq \vartheta_1 \leqq \frac{\pi}{2} + \varphi_1$. For saa vidt nu α og α_1 opfylde disse Betingelser, vil $\vartheta = \alpha$, $\vartheta_1 = \alpha_1$; er derimod $\alpha < \frac{\pi}{2} - \varphi$ eller $\alpha_1 > \frac{\pi}{2} + \varphi_1$, vil Ligevægt være umulig, og kun naar $\alpha > \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\alpha_1 < \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, kan et yderligere Tryk q i Stangens Længderetning fra hvert Understøtningspunkt imod det andet forøge ϑ_1 til $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$. Følgelig ville i Udtrykkene $R = \frac{V\sqrt{1 + \mu'^2}}{1 + \mu'\mu'_1}$ og $R_1 = \frac{V\mu'\sqrt{1 + \mu'^2_1}}{1 + \mu'\mu'_1}$ de faktiske Friktionskoefficienter μ' og μ'_1 være

$$\mu' = \cot \alpha = \frac{L \cos v}{\frac{V}{2} + L \sin v}, \quad \mu'_1 = \cot \alpha_1 = \frac{\frac{V}{2} - L \sin v}{L \cos v},$$

naar dette giver $\mu' < \mu$ og $-\mu_1 < \mu'_1 < \mu_1$, men

$$\mu' = \frac{1}{2\, tg\, v + tg\, \varphi_1} = \frac{1}{2\, tg\, v + \mu_1}, \quad \mu'_1 = tg\, \varphi_1 = \mu_1,$$

naar $\frac{L \cos v}{\frac{V}{2} + L \sin v} < \mu$ og $\frac{\frac{V}{2} - L \sin v}{L \cos v} > \mu_1$, og intet andet Til-

fælde kan give Hvile. Specielt vil $L = 0$ tilfredsstille de sidste Betingelser.

Det her betragtede Exempel vil iøvrigt ganske godt illustrere Betydningen af den Maade, hvorpaa Modstandene først ere kaldte til Live, idet de derved frembragte Initialspændinger blive at tage med i Beregningen. De ovenfor fundne Resultater ere saaledes utvivlsomt rigtige, naar ved Stangens Anbringelse ingen fremmede Kræfter ere indførte, idet man, understøttende den i dens to Endepunkter eller i Tyngdepunktet, har bevæget den, indtil den i Stillingen AB netop samtidig berører A og B, og først da har fjernet Understøtningerne og med det samme de ydre Tryk, der have frembragt Spændingen L. Antages for Simpelheds Skyld L kun at hidrøre fra Anbringelsesmaaden, saa vil i disse to Tifælde under Anbringelsen de indre Spændinger i Stangen grafisk kunne fremstilles ved Fig. 6 og 7, hvori de vinkelret paa AB afsatte Ordinater paa hvert Sted angiver den strækkende (trykkende) Kraft, og ifølge Hooke's Lov vil da Stangens Totalstrækning i begge Tilfælde være Nul, hvortil svarer Initialspændingen $L = 0$. Anderledes bliver derimod Resultatet, naar man først støtter Stangen mod A og derpaa, udøvende et paa denne vinkelret Træk i dens andet Endepunkt, lader den, paavirket af Tyngdekraften, dreje sig om A, indtil B tager paa, eller naar man f. Ex. holder den under Heldningen v ved et vandret Træk i dens øvre Endepunkt, indtil den vandrette Plan, der bærer det andet Endepunkt og antages forskydelig, er skudt saa langt frem, at dette falder i A; i disse Tilfælde, for hvilke Fig. 8 og 9 repræsentere Spændingerne, vil til Totalkompressionen (prop. med Arealet af Spændingsdiagrammet) svare henholdsvis $L = \frac{V}{2} sin\, v$ og $L = \frac{V}{2} sin\, v + \frac{V}{2}\frac{cos^2\, v}{sin\, v} = \frac{V}{2} cosec\, v$, og almindelig vil, naar Trækket i B udøver et Tryk T efter Stangens Længderetning, L være lig $T + \frac{V}{2} sin\, v$. Resultanterne r og r_1 ville, som det umiddelbart var at indse, være de samme som de under Slutningen af Anbringelsen virkende

Tryk, fra hvilke altsaa Reaktionerne ville afvige saa lidt som muligt.

Det tilføjes endnu blot, at Bøjningen af Stangen, for saa vidt dennes Tykkelse ved A og B ikke er forsvindende, vil faa Betydning ved Bestemmelsen af Reaktionernes Angrebspunkter.

EXAMENSOPGAVER.

Alm. Forberedelsesexamen. Juni—Juli 1887. (Sygeexamen).

Praktisk Regning.

1. En Mand vil rejse i 6 Uger saaledes, at han opholder sig 10 Dage i Tyskland, 12 Dage i Frankrig og 20 Dage i England. Han regner at bruge pr. Dag i Frankrig $1\frac{1}{4}$ og i England $1\frac{1}{2}$ Gange saa meget som i Tyskland. Inden sin Afrejse skaffer han sig i hvert af de 3 Landes Mønt det Beløb, han beregner at bruge der i Landet, hvortil medgaar 900 Kr., idet Omkostningerne ved Vexlingen ere $\frac{1}{10}$ pCt. af den vexlede Sum. Hvor stort et Beløb i hvert af de 3 Landes Penge rejser han ud med? (1 Reichsmark = 90 Øre, 1 Franc = 72 Øre, 1 Pund Sterling = 20 Shilling à 12 Pence = 18 Kr.).

Opl. $1001 : 1000 = 900 : v,\ v = 899{,}10$ Kr.

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{30};\ x + y + z = 899{,}10,$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{899{,}10}{11} = 81{,}736.$$

$$x = 163{,}47 = 181{,}63 \text{ Rm.}$$

$$y = 245{,}21 = 340{,}57 \text{ fr.}$$

$$z = 490{,}42 = 27 \text{ Lstr. } 4 \text{ sh. } 11 \text{ d.}$$

2. Under 45 Graders Bredde vil et Pendul af Længden 0,99353 Meter have en Svingningstid = 1 Sek. Hvor stor er Tyngdens Akceleration g i danske Fod paa samme Sted? (Naar et Pendul af Længden l har en Svingningstid af t Sek., gjælder

Ligningen $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. 1 Meter = 3,1862 danske Fod.)

Opl. $g = \pi^2 l = \pi^2 . 0,99353 . 3,1862$ danske Fod.

$$
\begin{aligned}
2 \log \pi &= 0,99430 \\
\log 0,99353 &= 9,99718 \\
\log 3,1862 &= 0,50328 \\
\hline
& \quad 1,49476
\end{aligned}
\qquad g = 31,244 \text{ danske Fod.}
$$

Alm. Forberedelses- og IV. Klasses Examen. Januar 1888.

Arithmetik.

1. A, B og C arve 3 Summer, der tilsammen udgjøre 3000 Kr. Efter nogen Tids Forløb have de af Arven kun 2840 Kr. tilbage, idet A og B have tabt henholdsvis 10 og 15 pCt. af deres Arveparter, medens C har vundet 10 pCt. De Summer, de have tilbage, sætte de ud paa Rente, A og B til 4 pCt., C til 5 pCt. aarlig, hvorved deres samlede aarlige Renteindtægt bliver 124,60 Kr. Hvor meget arvede hver?

2. Dan den Ligning, hvis Rødder ere de 3die Potenser af Rødderne i Ligningen

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

3. Find x af Ligningen

$$(\log x + 2,451)^5 = -0,011.$$

Opl. 1.

$$x + y + z = 3000, \qquad \text{(a)}$$

$$0,9x + 0,85y + 1,1z = 2840, \qquad \text{(b)}$$

$$0,036x + 0,034y + 0,055z = 124,60, \qquad \text{(c)}$$

100 (b) — 2000 (c) giver $18x + 17y = 34800$,

55 (a) — 1000 (c) . . $19x + 21y = 40400$,

$$x = 800, \; y = 1200, \; z = 1000.$$

Opl. 2. Naar $x^2 - 4x + 1 = 0$ har Rødderne α og β, saa er

$$\alpha + \beta = 4, \; \alpha\beta = 1,$$

hvoraf $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 52$, $\alpha^3 \beta^3 = 1$, altsaa er den søgte Ligning

$$y^2 - 52y + 1 = 0.$$

Opl. 3. Man faar

$$\log x = -\sqrt[5]{0,011} - 2,451 = -0,40577 - 2,451$$

eller

$$\log x = 0,14323 - 3,$$

$$x = 0,0013907.$$

Geometri.

1. Der er givet Siderne a, b og c i en Trekant. Find Afstandene fra Siden a's Midtpunkt til dens og dens Forlængelses Røringspunkter med Trekantens 4 Berøringscirkler, og vis, at disse Afstande kunne udtrykkes alene ved b og c.

2. Konstruer et Kvadrat, hvori Forskjellen mellem Diagonal og Side er lig en given Længde d.

3. I en Cirkel har den Bue, hvis Gradeantal er 18^0, Længden 1 Fod. Find Cirklens Radius samt Arealerne af den Sektor (Udsnit) og det Segment (Afsnit), der begrænses af Buen.

Opl. 3. $r = \frac{360}{18 . 2\pi} = \frac{10}{\pi} = 3,1831$ Fod.

$$\text{Sektoren} = \frac{5}{\pi} = 1,5915 \text{ Kvfod.}$$

$$\text{Segmentet} = \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,r^2 = 1,5915 - \frac{100\,(\sqrt{5}-1)}{8\pi^2}$$

$$= 1,5915 - 1,5656 = 0,0259 \text{ Kvfod.}$$

Praktisk Regning.

1. En Mand forskriver fra Frankrig 24 Kasser, hver indeholdende 60 Flasker Vin; Indkjøbsprisen pr. Flaske er for 6 af Kasserne 6,25 Francs, for 14 af Kasserne 4,75 Francs, for de andre 4 3,20 Francs. Transporten til Kjøbenhavn koster 176,12 Reichsmark, og inden han faar Vinen udleveret, maa han i Omkostninger betale $2\frac{1}{2}$ pCt. af den hele hidtil udgivne Sum, samt i Told $33\frac{1}{3}$ Øre pr. Flaske. Hvor meget har han ialt betalt i danske Penge pr. Flaske for hver af de 3 Slags Vin, naar Udgifterne med Undtagelse af Indkjøbsprisen fordeles ligelig paa Flaskerne?

100 Francs = 72 Kroner. 100 Reichsmark = 88,15 Kroner.

2. En By har 50830 Indbyggere, dens Forstad 15465. I 10 Aar voxer Byens Folkemængde med 2 pCt. aarlig, Forstadens med 6 pCt. aarlig; hvor mange Indbyggere have de tilsammen efter 10 Aars Forløb? Hvis Forøgelsen i Folkemængde i de 10 Aar var fremkommen ved, at deres samlede Indbyggerantal hvert Aar var voxet med x pCt, hvor stor maatte saa x være?

I Besvarelsen skal medoptages saa mange Mellemresultater og Udregninger, at Fremgangsmaaden tydelig kan ses.

Opl. 1. 6 . 60 . 6,25 Fr. = 2250 Fr.
14 . 60 . 4,75 — = 3990 —
4 . 60 . 3,20 — = 768 —

Indkjøbspris = 7008 Fr. = 5045 Kr. 76 Øre.
Transport = 176,12 Rmk. = 155 — 25 —

5201 Kr. 01 Øre,
heraf $2\frac{1}{2}$ pCt. = 130 — 03 —

5331 — 04 —
5045 — 76 —

Omkostninger 285 Kr. 28 Øre, foruden Told,
eller pr. Flaske 19,8 Øre,
Told 33,3 —

giver et Tillæg af ialt 53,1 Øre pr. Flaske.

Da Indkjøbsprisen i Kronemønt pr. Flaske af hver af de tre Sorter er henholdsvis

4 Kr. 50 Øre, 3 Kr. 42 Øre og 2 Kr. 30,4 Øre,

blive de søgte Priser altsaa

5 Kr. 03 Øre, 3 Kr. 95 Øre og 2 Kr. 83 Øre.

Opl. 2.

$$50830 \cdot 1{,}02^{10} + 15465 \cdot 1{,}06^{10} = 61961 + 27698 = 89659.$$

$$89659 = 66295\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{10} \text{ giver } x = 3{,}06 \text{ pCt.}$$

Afgangsexamen til Universitetet. Januar 1888.

Arithmetik.

1. En Brøk udvikles paa sædvanlig Maade i Kjædebrøk, kun at man stadig som ufuldstændige Kvotienter tager de nærmest højere hele Tal, saa at Kjædebrøken faar Formen

$$a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2} \cdots}$$

Hvorledes beregnes efterhaanden Konvergenterne, og hvorledes kunne disse Kjædebrøker anvendes til Løsning af den ubestemte Ligning

$$ax - by = 1?$$

2. Af en vilkaarlig Størrelse x_0 beregnes efterhaanden x_1, x_2, x_3, x_4 ..... ved Formlen

$$x_{n+1} = a - \frac{1}{d + x_n}; \; (n = 0, 1, 2, 3 \ldots.).$$

Angiv de Relationer, der maa findes mellem a og d, for at derved skal faas identisk enten $x_2 = x_0$ eller $x_3 = x_0$ eller $x_4 = x_0$.

Opl. 1. Idet man gaar frem som ved alm. Kjædebrøker, finder man

$$y_n = a_n y_{n-1} - y_{n-2}; \; z_n = a_n z_{n-1} - z_{n-2},$$

hvoraf udledes $$y_{n-1} z_n - y_n z_{n-1} = 1,$$

der for den ubestemte Ligning giver $x = y_{n-1}$; $y = z_{n-1}$, naar $a = z_n$ $b = y_n$.

Opl. 2. Skrives Ligningen

$$x_{n+1} + d = a + d - \frac{1}{d + x_n}$$

og sættes

$$x_n + d = y_n; \; a + d = a,$$

faar man

$$y_{n+1} = a - \frac{1}{y_n} = a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{y_{n-1}}} = a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{y_{n-2}}}} \quad \text{o. s. v.,}$$

x_2 identisk lig x_0 giver y_2 identisk lig y_0.

altsaa $$y_0 = a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{y_0}} = \frac{(a^2 - 1)\,y_0 - a}{a y_0 - 1},$$

der bliver identisk for $a = 0$.

Paa lignende Maade faas

$$y_0 = y_3 = \frac{a\,(a^2 - 2)\,y_0 - (a^2 - 1)}{(a^2 - 1)\,y_0 - a},$$

der bliver identisk for $a = \begin{cases} +1 \\ -1, \end{cases}$

og $$y_0 = y_4 = \frac{(a^4 - 3a^2 + 1)\,y_0 - (a^3 - 2a)}{(a^3 - 2a)\,y_0 - a^2 + 1},$$

der bliver identisk for $a = 0$ og $a^2 = 2$.

Beregningsopgave.

I en sfærisk Trekant ABC med Siderne (udtrykte i Grader) a, b, c, har man

$$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin s \sin(s - a)}}$$

og de analoge, hvor s betyder Sidernes halve Sum.

Beregn Forskjellen mellem Arealet af den sfæriske Trekant ABC, liggende paa en Kugle med Radius 1 og den plane Trekant med de samme Vinkelspidser, idet

$$a = 32^0\ 16'; \quad b = 26^0\ 12'\ 20''; \quad c = 38^0\ 44'.$$

Geometri.

1. Et regulært Tetraeder kan ved Drejning om forskjellige Axer bringes til at dække sig selv; hvor mange saadanne Axer gives der, og hvorledes ere de beliggende?

2. Fra Punktet A med Koordinaterne x og y trækkes en Linie, der skjærer Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (a > b)$$

i Punkterne B og C. I hvilken Retning skal Linien trækkes, for

at Produktet $AB \,.\, AC$ skal blive saa lille som mulig? A antages at ligge uden for Ellipsen, og der tages intet Hensyn til, om Skjæringspunkterne ere reelle eller imaginære.

3. Konstruer en Trekant af Højden og Medianen til en Side og denne Sides modstaaende Vinkel.

Kandidaten kan efter Behag løse Opgaven ved geometrisk Konstruktion eller gjennem Beregning.

Opl. 1. Ved Drejning et helt Antal Omdrejninger om en vilkaarlig Axe bringes ethvert Legeme tilbage i dets oprindelige Stilling; bortses fra disse Drejninger, faa vi følgende:

En Kant AB drejes om paa CD; Drejningsaxen maa da være Skjæringslinie for to Planer vinkelrette paa Midten af AC og BD; en saadan Skjæringslinie maa enten være en Højde eller en Linie gjennem Midtpunkterne af 2 modstaaende Kanter. Der bliver derfor 4 Axer med Drejninger, der have Perioden $\frac{2\pi}{3}$, 3 Axer med Drejninger, der have Perioden π.

2. Man faar $AB \,.\, AC = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) : \left(\frac{\cos^2 a}{a^2} + \frac{\sin^2 a}{b^2}\right)$, der bliver saa lille som mulig, naar

$$\frac{\cos^2 a}{a^2} + \frac{\sin^2 a}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \sin^2 a \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

er saa stor som mulig. Dette indtræffer for $\sin a = 1$, altsaa for en Linie parallel med den lille Axe.

3. Lad Trekanten være ABC, hvor AC er den givne Side. Forlænges Medianen BD til E, hvor $BD = DE$, bliver $\angle BCE$ Supplement til den givne Vinkel B. Konstruktionen bliver da følgende:

$\triangle BFD$, hvor BF er Højden, konstrueres, E bestemmes, og C findes nu som Skjæringspunkt for FD og en Bue over BE, rummende $\angle BCE$.

Projektionstegning.

En ret cirkulær Cylinder med et indskrevet regulært 6-sidet Prisme fremstilles ved sine Projektioner, idet Cylinderens Frem-

bringer ikke er parallel med nogen af Billedplanerne. Dernæst konstrueres Sporene af en Plan, der rører Cylinderen langs en af det indskrevne Prismes Sidekanter.

LØSNING AF OPGAVERNE 263, 491, 553, 555.

263. Hvorledes kan man af

$$x + \frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{x} = -3p$$

udlede $\left(x + \frac{\omega}{1-x} - \omega^2 \frac{1-x}{x}\right)^3 = -27(p-\omega)(p-\omega^2)^2$,

naar ω er Rod i Ligningen $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Man har

$$x + \frac{\omega}{1-x} - \omega^2 \frac{1-x}{x} = -\frac{x^3 + (\omega^2 - 1)x^2 - (\omega + 2\omega^2)x + \omega^2}{x(1-x)},$$

og, da $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, kan Tælleren reduceres til

$$x^3 + (\omega^2 - 1)x^2 - (\omega^2 - 1)x + \omega^2 = (x + \omega^2)(x^2 - x + 1)$$
$$= (x + \omega^2)^2 (x + \omega);$$

følgelig er

$$\left(x + \frac{\omega}{1-x} - \omega^2 \frac{1-x}{x}\right)^3 = -\frac{(x+\omega)^3}{x(1-x)} \cdot \left[\frac{(x+\omega^2)^3}{x(1-x)}\right]^2.$$

Nu er

$$\frac{(x+\omega)^3}{x(1-x)} = \frac{x^3 + 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3}{x(1-x)}$$
$$= \frac{x^3 + 3\omega x^2 - 3(1+\omega)x + 1}{x(1-x)} = \frac{x^3 - 3x + 1}{x(1-x)} - 3\omega = 3(p-\omega),$$

idet man benytter den givne Ligning til Bestemmelse af p, og analogt faar man

$$\frac{(x+\omega^2)^3}{x(1-x)} = 3(p - \omega^2),$$

saa at altsaa

$$\left(x + \frac{\omega}{1-x} - \omega^2 \frac{1-x}{x}\right)^3 = -27(p-\omega)(p-\omega^2)^2.$$

(A. S. Bang).

491. Fodpunkterne af de vinkelrette fra et Punkt P af en Cirkelperiferi paa Siderne af en indskreven Trekant ligge paa en ret Linie (Simsons Linie). Man søger Indhyllingskurven for denne Linie, idet Punktet P glider paa Periferien.

Bruger man retvinklede Koordinater og tager Begyndelsespunkt i en af Trekantens Vinkelspidser, Axer i Halveringslinierne af Vinklerne mellem de to sammenstødende Sider, da kan Cirklens Ligning være

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$

og Ligningen for Sideparret

$$Ax^2 + By^2 = 0.$$

Tegnes nu en Cirkel over en Korde fra Begyndelsespunktet som Diameter, saa vil dens Skjæringskorde med Sideparret være en Simsonsk Linje; er nu Ligningen for en saadan Cirkel $x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0$, saa kan man finde Skjæringskorden med $Ax^2 + By^2 = 0$ ved at bestemme λ i Ligningen $x^2 + y^2 - 2px - 2qy + \lambda(Ax^2 + By^2) = 0$, saaledes at venstre Side indeholder venstre Side i $px + qy = 0$, Ligningen for Tangenten til Cirklen i Begyndelsespunktet, som Faktor; man finder da, at den Simsonske Linie er $(A - B)(px - qy) - 2(Aq^2 + Bp^2) = 0$. Da nu Centret (p, q) beskriver en Cirkel ligedannet med den givne i Forholdet $\frac{1}{2}$ og med Begyndelsespunktet til Lighedspunkt, saa har man $p^2 + q^2 = ap + bq$; den Simsonske Linie bliver da

$$(A - B)(px - qy)(p^2 + q^2) - 2(Aq^2 + Bp^2)(ap + bq) = 0.$$

Da denne Ligning er homogen af 3die Grad med Hensyn til p og q, saa maa Linien indhylle en unikursal Kurve af 3die Klasse; da Linien for to Værdier af $p : q$, bestemte ved $p^2 + q^2 = 0$, falder uendelig fjern, saa har Kurven en Dobbelttangent i den uendelig fjerne rette Linie; Røringspunkterne bestemmes ved at $px - qy$ skal være Faktor i $p^2 + q^2$, altsaa $x^2 + y^2 = 0$; de blive altsaa de uendelig fjerne Cirkelpunkter. Den søgte Kurve er altsaa en cirkulær Kurve af 4de Orden med 3 Spidser og med den uendelig fjerne rette Linie til Dobbelttangent; den er da en Hypocykloide.

(Ligningen for den Simsonske Linie viser forøvrigt, hvorledes

man paa en meget simpel Maade kan konstruere en saadan Linie med en given Retning).

(E. C. Valentiner).

553. Konstruer en Trekant af den Linie, der deler en Vinkel i to Stykker, der forholde sig som 1 : 2, dens Vinkel med den modstaaende Side og Forholdet mellem de Stykker, hvori den deler samme.

(A. S. Bang).

Lad ABC være den søgte Trekant og CD den Linie, der deler $\angle C$ saaledes, at $\angle BCD = 2 . \angle ACD$. Drejes DA om DC hen i Stillingen DA_1, vil CA_1 halvere $\angle DCB$, og Retningen af A_1B er bekjendt, da man i $\triangle A_1DB$ kjender $\angle A_1DB = \angle ADC - \angle BDC$ og Forholdet $\frac{A_1D}{BD} = \frac{AD}{BD}$. Skjærer A_1B DC i F, er Forholdet $\frac{FA_1}{A_1B}$ altsaa bekjendt. Trækkes gjennem D en Parallel med A_1B, der skjærer CA_1 og CB i P og N, kan $\triangle DCN$ konstrueres, da man foruden DC og $\angle CDN$ kjender CN, der kan findes af

$$\frac{CN}{CD} = \frac{PN}{PD} = \frac{A_1B}{FA_1}.$$

(C. Crone).

555. Konstruer en Sexkant, naar man kjender alle Siderne og desuden den Vinkel, som ethvert Par modstaaende Sider danne med hinanden.

(L. Ankjær).

Lad Sexkanten være $ABCDEF$. Figuren $AFED$ drejes 180^0 om Midtpunktet af Diagonalen AD, saa den falder i $DGHA$, hvorpaa BC parallelforskydes til HI.

Nu kan Trekant CIG konstrueres. Dens Sider bestemmes af de tre Trekanter BAH, CDG og GHI, idet nemlig $\angle BAH$, $\angle CDG$ og $\angle GHI$ ere de givne Vinkler mellem Sexkantens modstaaende Sider og de Sider, som indeslutte disse Vinkler, ere de givne Sider i Sexkanten.

Naar Trekant CIG er konstrueret, bestemmes Punktet H, hvorpaa HI parallelforskydes til BC; nu kunne A og D bestemmes, og drejes da Figur $AHGD$ 180^0 om Midtpunktot af AD, er Sekanten konstrueret.

Denne Opgave er en Udvidelse af Opgave 544.

(A. S. Bang).

OPGAVER TIL LØSNING.

558. $ABCD$ være en indskreven Firkant. Den vinkelrette paa Midten af AC skjærer CD i E og AD i F. Bevis, at den rette Linie, som halverer Vinklen ABC, ogsaa halverer Vinklen EBF.

(A. S. Bang).

559. Mellem tre irrationale Tal α, β, γ, som ere givne numerisk med et saa stort Antal Decimaler, man ønsker, antages der at bestaa en lineær Relation af Formen

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

hvor Koefficienterne a, b, c ere positive eller negative hele Tal, som ikke overstige en opgiven Grænse.

Hvorledes bestemmer man disse Koefficienter?

Fremgangsmaaden ønskes oplyst ved et Talexempel.

(J. P. Gram).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von	Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og **H. G. Zeuthen.**

FEMTE RÆKKE.

Sjette Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1888.

ANDET HEFTE.

T i d s s k r i f t f o r M a t h e m a t i k udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. G r a m, Alhambravej 6, Kjøbenhavn, V.

Fig. 1.

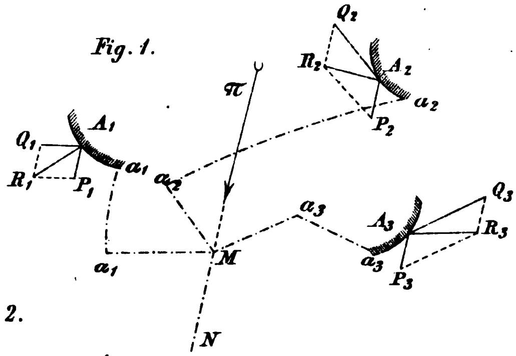


Fig. 2.

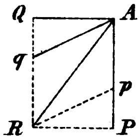


Fig. 3.

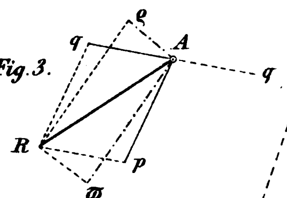


Fig. 4.

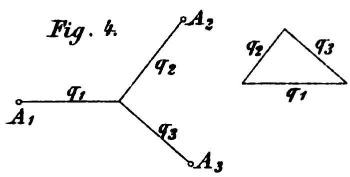


Fig. 5.

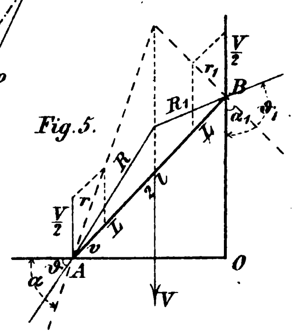


Fig. 6.

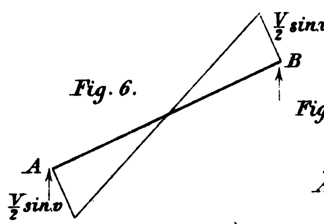


Fig. 7.

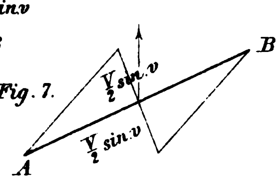


Fig. 8.

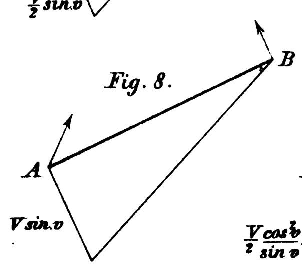
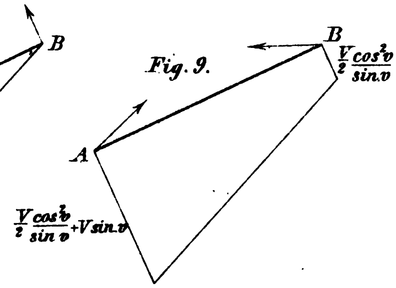


Fig. 9.



Hoffensberg & Trap's Etabl.

RÆKKEUDVIKLINGER AF RØDDERNE I LIGNINGEN $x^n + ax + b = 0$.

(AF N. MADSEN).

1. Fremstillingen af en algebraisk Lignings Rødder ved uendelige, konvergerende Rækker faar navnlig Betydning, naar man kan angive det almindelige Led under en simpel Form og ved Hjælp af en eller flere saadanne Rækker beregne alle Ligningens Rødder i ethvert forekommende Tilfælde. Dette kan altid lade sig gjøre, naar Ligningen har Formen

$$x^n + ax^p + b = 0.$$

Jeg skal dog her indskrænke mig til det vigtige Tilfælde, hvor $p = 1$, n positiv hel.

Naar man i Ligningen

$$x^n + ax + b = 0$$

sætter $x = \frac{b}{a} y$, faar den Formen

$$y^n + cy + c = 0 \tag{1}$$

eller

$$y = -\left(1 + \frac{1}{c} y^n\right),$$

der ved Anvendelse af Lagranges Række giver

$$\left. y = -\left(1 + \frac{(-1)^n}{c} + \frac{n}{c^2} + (-1)^n . \frac{n(3n-1)}{1.2.c^3} + \frac{n(4n-1)(4n-2)}{1.2.3.c^4} + \ldots\right) \right\} \tag{2}$$

med det almindelige Led

$$u_{r+1} = (-1)^{nr+1} . \frac{n(nr-1)(nr-2)\ldots(nr-(r-2))}{[r-1].c^r}.$$

Denne Række kan udledes elementært paa følgende Maade: Sættes i (1) $y = z.\sqrt[n-1]{c}$, bringes Ligningen paa Formen

$$z^n + z - h = 0, \tag{3}$$

idet $h = -\frac{1}{\sqrt[n-1]{c}}$. For tilstrækkelig smaa Værdier af h kan man sætte

$$z = A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \dots \tag{4}$$

eller, ifølge (3),

$$z = A_1 z (1 + z^{n-1}) + A_2 z^2 (1 + z^{n-1})^2 + A_3 z^3 (1 + z^{n-1})^3 + \dots,$$

der ved de ubestemte Koefficienters Methode giver

$$A_1 = 1;\ A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = 0;\ A_n = -1;$$
$$A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = A_{2n-2} = 0;\ A_{2n-1} = n;\ \dots,$$

idet man til den sukcessive Bestemmelse af Koefficienterne i Almindelighed har

$$\left.\begin{aligned} & A_{nr-(r-1)} + \frac{n(r-1)-(r-2)}{1} A_{n(r-1)-(r-2)} + \\ & \frac{(n(r-2)-(r-3))(n(r-2)-(r-2))}{1\,.\,2} A_{n(r-2)-(r-3)} + \dots \\ & \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-2))}{[r-1]} A_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Men denne Ligning er identisk, naar man antager

$$A_{nr-(r-1)} = (-1)^r \,.\, \frac{n(nr-1)(nr-2)\dots(nr-(r-2))}{[r-1]}, \tag{6}$$

for $r = 1, 2, \dots r$. Indsættes nemlig disse Udtryk og udføres Multiplikationerne, faar Koefficienten til n^{p+1} Faktoren

$$M_{r,p} = r^p - \frac{r-1}{1}(r-1)^p + \frac{(r-1)(r-2)}{1\,.\,2}(r-2)^p + \dots$$
$$\dots + (-1)^{r-1}(r-(r-1))^p,$$

hvor $p = 0, 1, 2 \dots r-2$. Men $M_{r,p} = 0$, saafremt $M_{r-1,p-1}$, $M_{r-2,p-2} \dots$ etc. alle ere Nul; thi udvikles $(r-1)^p$; $(r-2)^p$; $\dots (r-(r-1))^p$ efter Binomialformlen, bliver det første Led i $M_{r,p}$ (ordnet efter Potenser af r) $M_{r,0} \,.\, r^p = (1-1)^{r-1} \,.\, r^p = 0$, og det almindelige Led faar Faktoren ($q = 0, 1, 2 \dots p-1$):

$$(r-1)^q - \frac{r-2}{1}(r-2)^q + \dots + (-1)^{r-2} = M_{r-1,p-1} = 0.$$

Da $M_{2,0} = 0$, er det hermed bevist, at $M_{r,p} = 0$ og at (6) altsaa er almengyldig. Rækken (4) vil nu falde sammen med (2).

Leddene u_r og u_{r+1} i (2) indeholde den fælles Faktor

$$(nr-(n+1))(nr-(n+2))\dots(nr-(r-2)).$$

Efter dennes Bortforkortning faas Konvergensbetingelsen

$$Lim \frac{u_{r+1}}{u_r} =$$

$$Lim \frac{(nr-1)(nr-2)\ldots(nr-n)}{((n-1)r+1).(n-1)r\ldots((n-1)r-(n-3))} \cdot \frac{1}{(r-1)c} < 1,$$

altsaa
$$c > \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}. \tag{7}$$

Dette er netop den Værdi, ved hvilken to af Ligningens Rødder blive lige store og samtidig gaa over fra reelle til imaginære Værdier.

(2) er altsaa $\left\{\begin{matrix}\text{konvergent} \\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$ eftersom $c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$.

Det er overflødigt at undersøge Rækken for $c = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$, da den i dette Tilfælde kun kan fremstille den bekjendte, rationale Dobbeltrod.

Da man for alle endelige r har

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \,.\, c,$$

bestemmer man let en højere Grænse for Rækkens Rest.

2. Ved Hjælp af (2) kan en af Ligningens negative Rødder beregnes med en hvilken som helst Nøjagtighed. De øvrige $n-1$ Rødder bestemmes ved en anden Række, der er konvergent samtidig med (2).

Ved Substitutionen $y = \frac{1}{z}$ ændres (1) til

$$z^n + z^{n-1} + \frac{1}{c} = 0$$

eller
$$z^{n-1} = d^{n-1} - z^n, \tag{8}$$

idet
$$d = \left(-\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{9}$$

Anvendes Laplace's Række (Ramus, Algebra og Funktionslære, 2. Kap., Fl. (86)) paa (8), faas

$$z = d - \frac{d^2}{n-1} + \frac{n+2}{(n-1)^2} \cdot \frac{d^3}{1.2} - \frac{(2n+2)(n+3)}{(n-1)^3} \cdot \frac{d^4}{1.2.3} + \ldots, \tag{10}$$

og man finder let det $(r+1)$'te Led

$$u_{r+1} = (-1)^r \cdot \frac{(n(r-1)+2)(n(r-2)+3)\dots(n+r)}{(n-1)^r} \cdot \frac{d^{r+1}}{[r]}.$$

Denne Formel udledes elementært paa lignende Maade som (2). Det drejer sig her om at bevise Identiteten

$$n \cdot \sum_{q=0}^{q=r} (-1)^q \cdot \frac{(A_1 - qn)(A_2 - qn)\dots(A_{r-1} - qn)}{[q][r-q]} = 0,$$

hvor A_1, $A_2 \dots A_{r-1}$ ere uafhængige af q. Udføres Multiplikationerne i Tællerne og sammendrages de Led, der indeholde den samme Kombination af Faktorer A, ser man let, at Ligningen maa være rigtig, da ethvert Led faar en Faktor $M_{r,p}$.

Konvergensgrænsen bestemmes af

$$Lim \frac{u_{r+1}}{u_r} =$$

$$Lim \frac{(n(r-1)+2)(n(r-2)+3)\dots(2n+r-1)}{(n(r-2)+2)(n(r-3)+3)\dots(n+r-1)} \cdot \frac{(n+r)d}{(n-1)r} < 1.$$

Heraf faas baade

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{n-1} < Lim \left(1 - \frac{n}{n(r-1)+2}\right)\left(1 - \frac{n}{n(r-2)+3}\right)\dots \\ \left(1 - \frac{n}{2n+r-1}\right) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

og

$$\left.\begin{aligned} \frac{nd}{n-1} < Lim \left(1 - \frac{1}{n(r-2)+3}\right)\left(1 - \frac{1}{n(r-3)+4}\right)\dots \\ \left(1 - \frac{1}{n+r}\right). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Er p et positivt helt Tal, kan man i Stedet for (11) sætte den lavere Grænse

$$\frac{d}{n-1} < \left(1 - \frac{n}{nr+1-(n-1)\frac{r-2}{p}}\right)^{\frac{r-2}{p}}$$

$$\cdot \left(1 - \frac{n}{nr+1-2(n-1)\frac{r-2}{p}}\right)^{\frac{r-2}{p}} \dots \left(1 - \frac{n}{2n+r-1}\right)^{\frac{r-2}{p}},$$

der, naar man sætter $r = \frac{1}{\varepsilon}$ (ε uendelig lille), kan faa Formen

$$\frac{d}{n-1} < \\ \text{Lim}\; e^{\frac{1-2\varepsilon}{p\varepsilon}\left[l.\left(1-\frac{n\varepsilon}{n-\frac{n-1}{p}+A\varepsilon}\right)+l.\left(1-\frac{n\varepsilon}{n-2.\frac{n-1}{p}+B\varepsilon}\right)+\ldots+l.\left(1-\frac{n\varepsilon}{1+(2n-1)\varepsilon}\right)\right]}$$

eller, ved Anvendelse af den logarithmiske Funktions Rækkeudvikling

$$\frac{d}{n-1} < e^{-n\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p+n-1}+\frac{1}{p+2(n-1)}+\ldots+\frac{1}{np-(n-1)}\right]}.$$

$p = r - 2 = \infty$ giver Grænsen i (11). Sættes $p = q\,(n-1)$, kan (11) altsaa skrives

$$\frac{d}{n-1} < e^{-\frac{n}{n-1}.s}, \tag{13}$$

hvor $s = Lim\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q+2}+\ldots[(n-1)\,q \text{ Led}]\right)$.

Sættes s, der maa være en Funktion af n, lig $f(n)$, faas

$$f(n_1)+f(n_2) = \\ Lim\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q+1}+\ldots+\frac{1}{q-1+(n_1-1)q}+\frac{1}{n_1 q}+\ldots+\frac{1}{n_1 q-1+n_1(n_2-1)q}\right) \\ = f(n_1\,.\,n_2),$$

gjældende baade for rationale og irrationale n, da q altid kan vælges saaledes, at $(n-1)\,q$ er hel.

Man maa altsaa have $f(n) = Log_a\, n$. (13) giver da

$$\frac{d}{n-1} < e^{-\frac{n}{n-1} Log_a\, n}.$$

Logarithmens Grundtal a bestemmes derved, at man for $n = 2$ har Konvergensgrænsen

$d = \frac{1}{4}$, der giver $a = e$, $f(n) = l\,.\,n$.

Ved at gaa ud fra (12), kommer man til Grænsen

$$\frac{d}{n-1} < \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n-1}s},$$

der maa falde sammen med (13), saa at man har

$$\frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n-1}s} = e^{-\frac{n}{n-1}s},$$

hvoraf, som før, $s = l\,.\,n$.

Man faar nu Konvergensgrænsen

$$d < \frac{n-1}{\frac{n}{n^{n-1}}} \text{ eller } c > \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}.$$

Er $c = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$, kunne vi benytte den Sætning, at en given Række er konvergent, naar man for en endelig, positiv Værdi af p har

$$Lim\, \frac{r}{p}\left(\frac{u_{r-p}}{u_r} - 1\right) > 1,$$

da Rækken saa er en Sum af p konvergente Rækker. I det foreliggende Tilfælde tages $p = n - 1$. Efter Bortforkortning af de fælles Faktorer for $u_{r-(n-1)}$ og u_r, faas

$$Lim\, \frac{r}{n-1}\left(\frac{u_{r-(n-1)}}{u_r} - 1\right) = \frac{3}{2}.$$

Rækken (10) er altsaa $\left\{\begin{matrix}\text{konvergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$, eftersom $c \left\{\begin{matrix} \geqq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \\ < \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\end{matrix}\right.$

(9) giver $n - 1$ Værdier af d, der ved Hjælp af (10) bestemme Ligningens $n - 1$ Rødder, saa længe Rækken er konvergent.

3. Der staar nu kun det Tilfælde tilbage, hvor man har $c < \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$. I saa Fald kan alle Ligningens n Rødder bestemmes af een Række. Sætter man nemlig

$$c_1 = (-c)^{\frac{1}{n}} \tag{14}$$

og anvendes Laplace's Række paa Ligning (1) under Formen

$$y^n = c_1^n + c_1^n \cdot y,$$

faas

$$\left.\begin{aligned} y &= c_1 + \frac{c_1^2}{n} + \frac{3-n}{n^2}\cdot\frac{c_1^3}{1.2} + \frac{(4-n)(4-2n)}{n^3}\cdot\frac{c_1^4}{1.2.3} + \ldots \\ u_r &= \frac{(r-n)(r-2n)(r-3n)\ldots(r-(r-2)n)}{n^{r-1}}\cdot\frac{c_1^r}{[r-1]} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

der ogsaa kan bevises elementært.

Til Bestemmelse af Konvergensgrænsen anvendes her med Fordel Betingelsen

$$Lim\,\frac{u_r}{u_{r-n}} = \frac{(n-1)^{n-1}\,.\,c_1^n}{n^n}\,.\,Lim\,\frac{r-n}{r-2n}\cdot\frac{r-2n}{r-3n}\cdots$$

$$\frac{r-(r-n-2)n}{r-(r-n-1)n}\cdot\frac{r-(r-n-1)n}{r-n} < 1,$$

der giver
$$c = c_1^n < \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}. \tag{16}$$

Er denne Betingelse opfyldt, bestemmer (15) i Forbindelse med (14) den givne Lignings n Rødder.

Da man for endelige r har

$$\frac{u_r}{u_{r-p}} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\,.\,c = a,$$

faas Resten eller Fejlen, naar Rækken (15) afbrydes ved det r'te Led

$$R_r < \frac{a}{1-a}(u_r + u_{r-1} + \ldots + u_{r-(n-1)}).$$

Skjønt Rødderne saaledes i alle Tilfælde ere bestemte ved de tre Rækker (2), (10) og (15), ere disse dog selvfølgelig praktisk uanvendelige, naar c er lig eller meget lidt forskjellig fra Grænseværdien $\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$. Vil man i dette Tilfælde benytte Rækker til Røddernes Beregning, er man henvist til saadanne, som jeg har omtalt i en foregaaende Artikel[1]). I disse Rækker kan det almindelige Led imidlertid ikke fremstilles under en i Praxis tilstrækkelig simpel Form, og man maa derfor lade sig nøje med Koefficienternes sukcessive Bestemmelse gjennem Differentialligningerne.

OM EN INTEGRAL AV CROFTON.

(AV H. PETRINI).

I „Philosophical Transactions“ för år 1868[2]) framställer Crofton en teori för s. k. „local probability“, medelst vilken han

[1]) Tidsskriftets 5. Aargang, 5. Hefte.
[2]) Jvfr. dette Tidsskrift 3. R. 4. Aarg. 1874 og 5. R. 2. Aarg. 1884.

beräknar värdet av åtsjilliga definita integraler. Ehuru en del av dessa äro synnerligen svåråtkåmliga på vanlig analytisk väg, kan man dåck, utan att behöva taga sin tillflykt till den jeometriska sannolikhetsberäkningens metod, evaluera några bland dem. Detta är, såsom i föreliggande uppsats skall visas, fallet med bland andra följande, uti åtsjilliga arbeten i integralkalkyl förekåmmande integral:

$$\int \Delta\,(\omega - \sin\omega) = \frac{1}{2} L^2 - \pi S,$$

där Δ betyder ett ytelemänt i planet,

ω vinkeln mellan två tanjänter, dragna från ytelemäntet till en jiven konväks sluten kontur,

L konturens längd,

S den av konturen omslutna ytan.

Integratsjonen sträcker sig över hela planet utanför den slutna konturen.

Drag från en yttre punkt P tvänne tanjänter till den jivna konturen, som råka hänne i punkterna A och B. Vinkeln APB är således $= \omega$. Kalla styckena AP ock BP för t_1 ock t_2 resp. Låt AP ock BP bilda med en jiven fiks riktning vinklarne a ock β resp.,

$$\therefore\ \omega = a - \beta.$$

För att finna ett uttryck på ytelemäntet Δ tages en punkt P' vilken som hälst i närheten av P, och dragas därifrån tvänne tanjänter $P'A'$ ock $P'B'$. Låt $P'A'$ råka PB i Q, ock $P'B'$ råka PA i R. Neglisjeras oändligt små kvantiteter av högre årdning än den första med avseende på da ock $d\beta$, kan fyrhörningen $PQP'R$ betraktas såsom en paralällogram, där sidan

$$PQ \text{ är } = t_1 \cdot \frac{1}{\sin\omega}\, da,$$

vilket lätt synes, om man från Q fäller en mot PA vinkelrät linie. Likaså finner man

$$P'Q = t_2 \cdot \frac{1}{\sin\omega}\, d\beta$$

på analågt sätt. Ytan av paralällogrammen $PQP'R$ är tydligen $= PQ \,.\, P'Q \sin\omega$ ock således $= \dfrac{t_1 t_2}{\sin\omega}\, da\, d\beta$. Tages denna yta till ytelemäntet Δ, fås altså följande uttryck på ytelemäntet:

$$\Delta = \frac{t_1 t_2}{\sin\omega}\, da\, d\beta. \tag{1}$$

Integratsjonen bör tydligen utsträckas från $\beta = a - \pi$ till $\beta = a$ och från $a = 0$ till $a = 2\pi$. Betecknas den sökta integralen med J, fås

$$J = \int \Delta(\omega - \sin\omega) = \int_0^{2\pi} da \int_{a-\pi}^{a} \frac{t_1 t_2}{\sin\omega}(\omega - \sin\omega)\, d\beta. \tag{2}$$

Införes vinkeln ω i stället för β enligt fårmeln

$$\beta = a - \omega, \tag{3}$$

får integralen följande utseende

$$J = \int_0^{2\pi} da \int_0^{\pi} \frac{t_1 t_2}{\sin\omega}(\omega - \sin\omega)\, d\omega. \tag{4}$$

Då t_1 är en funksjon av a ock ω, så är

$$dt_1 = \frac{dt_1}{d\omega} d\omega + \frac{dt_1}{da} da.$$

Kvantiteten $\frac{dt_1}{d\omega} d\omega$ betyder tillskåttet i t_1, då a är konstant, d. v. s. då P' sammanfaller med R.

$$\therefore \frac{dt_1}{d\omega} d\omega = PR = t_2 \cdot \frac{1}{\sin\omega} d\beta.$$

Men för a = konstant är enligt (3) $d\beta = -d\omega$,

$$\therefore \frac{dt_1}{d\omega} = -\frac{t_2}{\sin\omega}. \tag{5}$$

Vidare är $\frac{dt_1}{da} da$ = tillskåttet i t_1, då ω är konstant, ock således $= P'A' - PA$ under förutsättning, att punkten P' tages så, att vinkeln $A'P'B' = APB = \omega$. Nu är

$$P'A' = P'Q + QA', \quad P'Q = \frac{t_2}{\sin\omega} d\beta,$$

$$QA' = PA - AA' - P'Q \cos\omega = PA - ds - t_1 \cot\omega,$$

då ds betecknar bågelemäntet i punkten A, räknat positift i riktningen AP. Härav fås

$$\frac{dt_1}{da} da = \frac{t_2}{\sin\omega} d\beta + PA - ds - t_1 \cot\omega - PA.$$

För ω konstant är enligt (3) $d\beta = da$,

$$\therefore \frac{dt_1}{da} = \frac{t_2}{\sin \omega} - t_1 \cot \omega - \varrho, \tag{6}$$

om ϱ är krökningsradien i punkten A.

Multipliseras båda mämbra i (5) med t_1, fås

$$\frac{t_1 t_2}{\sin \omega} = -\frac{1}{2} \frac{dt_1^2}{d\omega}. \tag{7}$$

Multipliceras båda mämbra i (6) med t_1, ock elimineras tärmen $\frac{t_1 t_2}{\sin \omega}$ medelst (7), fås

$$\frac{1}{2} \frac{dt_1^2}{d\omega} = -\frac{1}{2} \frac{dt_1^2}{da} - t_1^2 \cot \omega - t_1 \varrho. \tag{8}$$

Ersättes i (4) $\frac{t_1 t_2}{\sin \omega}$ med $-\frac{1}{2} \frac{dt_1^2}{d\omega}$ enligt (7), fås

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} da \int_0^{\pi} \frac{dt_1^2}{d\omega} (\omega - \sin \omega)\, d\omega.$$

Medelst partsiäll integratsjon fås härav

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} da \Big[t_1^2 (\omega - \sin \omega) \Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} da \int_0^{\pi} t_1^2 (1 - \cos \omega)\, d\omega.$$

$$\text{För } \omega = \pi \text{ är } t_1 = 0, \quad \therefore \Big[t_1^2 (\omega - \sin \omega) \Big]^{\pi} = 0.$$

För $\omega = 0$ är visserligen $t_1 = \infty$, men $t_1 \sin \omega$ är ändligt; ty för $\omega = 0$ är $t_1 \sin \omega$ = avståndet mellan två paralälla tanjänter.

$$\therefore \Big[t_1^2 (\omega - \sin \omega) \Big]_0 = \Big[(t_1 \sin \omega)^2 \cdot \frac{\omega - \sin \omega}{\sin^2 \omega} \Big]_0 = 0,$$

$$\therefore J = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} da \int_0^{\pi} t_1^2 (1 - \cos \omega)\, d\omega. \tag{9}$$

Låt $f(\omega)$ vara en deriverbar funksjon av ω. Jenom partsiäll integratsjon fås

$$\int t_1^2 f'(\omega)\, d\omega = t_1^2 f(\omega) - \int f(\omega) \frac{dt_1^2}{d\omega}\, d\omega.$$

Elimineras $\frac{dt_1^2}{d\omega}$ medelst (8), fås

$$\int t_1^2 f'(\omega)\,d\omega = t_1^2 f(\omega) + \int f(\omega)\left\{\frac{dt_1^2}{da} + 2t_1^2 \cot\omega + 2t_1\varrho\right\} d\omega,$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \int t_1^2 \left\{f'(\omega) - 2f(\omega)\cot\omega\right\} d\omega = \\ t_1^2 f(\omega) + \int f(\omega)\left\{\frac{dt_1^2}{da} + 2t_1\varrho\right\} d\omega. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Nu bestämmes $f(\omega)$ jenom följande vilkor:

$$f'(\omega) - 2f(\omega)\cot\omega = 1 - \cos\omega.$$

Löses denna diferäntsialekvatsjon, fås

$$f(\omega) = \sin\omega\,(1 - \cos\omega),$$

om man sätter den arbiträra konstanten $= 0$. Insättes detta spesiälla värde på $f(\omega)$ i (10), fås

$$\int t_1^2 (1 - \cos\omega)\,d\omega = t_1^2 \sin\omega\,(1 - \cos\omega) + \int \sin\omega\,(1 - \cos\omega)\left\{\frac{dt_1^2}{da} + 2t_1\varrho\right\} d\omega.$$

Ekvatsjonen (9) övergår nu till

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} da \Big[t_1^2 \sin\omega\,(1 - \cos\omega)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} da \int_0^{\pi} \sin\omega\,(1 - \cos\omega)\left\{\frac{dt_1^2}{da} + 2t_1\varrho\right\} d\omega.$$

På samma sätt som förut bevisas, att första tärmen är $= 0$. Vidare är

$$\int_0^{2\pi} da \int_0^{\pi} \sin\omega\,(1 - \cos\omega)\frac{dt_1^2}{da}\,d\omega = \int_0^{\pi} \sin\omega\,(1 - \cos\omega)\,d\omega \int_0^{2\pi} \frac{dt_1^2}{da}\,da$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\omega\,(1 - \cos\omega)\,d\omega \Big[t_1^2\Big]_0^{2\pi} = 0,$$

ty t_1 återtager samma värde då a ökas med 2π.

$$\therefore J = \int_0^{2\pi} da \int_0^{\pi} \sin\omega\,(1 - \cos\omega)\,t_1\,\varrho\,d\omega. \quad (11)$$

Sätt
$$t_1 \sin\omega = x, \quad t_2 \sin\omega = y. \quad (12)$$

$$\therefore \frac{dx}{d\omega} = \frac{dt_1}{d\omega}\sin\omega + t_1\cos\omega = -t_2 + t_1\cos\omega \quad \text{(enligt (5))}.$$

$$\therefore \frac{dx}{d\omega} = x\cot\omega - \frac{y}{\sin\omega}. \quad (13)$$

Elimineras t_1 medelst (12) ock iakttages, att ϱ är oberoende av ω, kan (11) skrivas

$$J = \int_0^{2\pi} \varrho\, da \int_0^{\pi} x\,(1 - \cos\omega)\, d\omega. \tag{14}$$

Nu är $\int x \cos\omega\, d\omega = x \sin\omega - \int \sin\omega \frac{dx}{d\omega} d\omega =$ (enligt (13))

$$= x \sin\omega - \int x \cos\omega\, d\omega + \int y\, d\omega,$$

$$\therefore \int x \cos\omega\, d\omega = \frac{1}{2} x \sin\omega + \frac{1}{2}\int y\, d\omega,$$

$$\therefore \int_0^{\pi} x \cos\omega\, d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} y\, d\omega.$$

Insättes detta uttryck i (14), fås

$$J = \int_0^{2\pi} \varrho\, da \int_0^{\pi} x\, d\omega - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho\, da \int_0^{\pi} y\, d\omega. \tag{15}$$

Sök värdet på

$$1.\quad J_1 = \int_0^{2\pi} \varrho\, da \int_0^{\pi} x\, d\omega, \qquad 2.\quad J_2 = \int_0^{2\pi} \varrho\, da \int_0^{\pi} y\, d\omega.$$

Beräkna först värdet på $\int_0^{\pi} x\, d\omega$, där a är konstant. Drag en tanjänt, som bildar med den jivna fiksa riktningen vinkeln a, samt tag denna tanjänt till riktningslinie i ett polärt koordinatsystem (r, ϑ) med origo i tanjeringspunkten. Kalla den vinkel, som radius väktor bildar med tanjänten i punkten (r, ϑ), för φ. Perpendikeln från origo mot tanjänten är tydligen $= x$. Kallas avståndet mellan perpendikelns fotpunkt ock tanjeringspunkten, räknat positift i tanjäntens riktning, för λ, så fås med lätthet följande relatsjoner:

$$\omega + \vartheta + \varphi = \pi,\; x = r \sin\varphi,\; \sin\varphi = \frac{r d\vartheta}{ds},\; \cos\varphi = \frac{dr}{ds},$$

$$\lambda = r\cos\varphi,\; d\omega = -d\vartheta - d\varphi,\; d\lambda = dr\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$\therefore x\, d\omega = -r\sin\varphi\,(d\vartheta + d\varphi) = -r\sin\varphi\, d\vartheta + d\lambda - dr\cos\varphi =$$

$$-r^2 \frac{d\vartheta^2}{ds} + d\lambda - \frac{dr^2}{ds} = d\lambda - ds,$$

$$\therefore \int_0^\pi x\,d\omega = \int_{\omega=0}^{\omega=\pi} (d\lambda - ds) = \Big[(\lambda - s)\Big]_{\omega=0}^{\omega=\pi}.$$

För $\omega = \pi$ sammanfaller tanjeringspunkten med origo,

$$\therefore \Big[\lambda = 0\Big]^{\omega=\pi}, \quad \Big[s = 0\Big]^{\omega=\pi}.$$

För $\omega = 0$ är tanjänten i punkten (r, ϑ) paraläll med tanjänten i origo. Kallas motsvarande värden på λ ock s för λ_0 ock s_0 resp., fås således

$$\int_0^\pi x\,d\omega = -\lambda_0 + s_0.$$

Integralen J_1 blir altså

$$J_1 = \int_0^{2\pi} (-\lambda_0 + s_0)\,\varrho\,da. \tag{16}$$

Sök värdet på

$$\int_0^{2\pi} \lambda_0\,da.$$

Då a ökas med π, byta de båda paralälla tanjänterna om råler, och man finner med lätthet

$$\lambda_0(a) = \lambda_0(a + \pi).$$

Sätter man

$$\varrho(a)\,da = ds, \quad \varrho(a + \pi)\,da = ds',$$

fås

$$\int_0^{2\pi} \lambda_0\,\varrho\,da = \int_0^\pi \lambda_0\,\varrho\,da + \int_\pi^{2\pi} \lambda_0\,\varrho\,da =$$

$$\int_0^\pi [\lambda_0(a)\,\varrho(a) + \lambda_0(a+\pi)\,\varrho(a+\pi)]\,da = \int_{a=0}^{a=\pi} \lambda_0\,(ds + ds').$$

Men

$$\lambda_0(a) = r\frac{dr}{ds'}, \quad \lambda_0(a+\pi) = r\frac{dr}{ds}, \quad \text{ock} \quad \lambda_0(a) = \lambda_0(a+\pi),$$

$$\therefore \lambda_0 \,.\, (ds + ds') = \lambda_0\,(a + \pi)\,ds + \lambda_0\,(a)\,ds' =$$

$$r\frac{dr}{ds}\,ds + r\frac{dr}{ds'}\,ds' = r\,dr,$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \lambda_0\,\varrho\,da = \int_{a=0}^{a=\pi} \lambda_0\,(ds + ds') = \int_{a=0}^{a=\pi} r\,dr = \Big[\frac{1}{2}r^2\Big]_{a=0}^{a=\pi} = 0,$$

ty $r(\alpha)$ är tydligen $= r(\alpha + \pi)$, $\therefore r(0) = r(\pi)$. Uttrycket (16) föränklas således till

$$J_1 = \int_{(L)} s_0 \, ds,$$

då man satt $\varrho\, d\alpha = ds$ ock låter integratsjonen utsträckas utäfter hela den slutna konturen. Man finner lätt, att $\int_{(L)} s_0\, ds$ kan skrivas ss. en summa $\sum_{\mu,\nu} ds_\mu\, ds_\nu$ av produkter av tvänne bågelemänt tillhörande L, då varje kombinatsjon av två bågelemänt $ds_\mu\, ds_\nu$ tages en gång. Toges varje sådan kombinatsjon två gånger, kunde man skriva

$$2 \sum_{\mu,\nu} ds_\mu\, ds_\nu = \sum_{(L)} ds_\mu \, . \sum_{L} ds_\nu = L^2,$$

$$\therefore \; 2 \int_{(L)} s_0\, ds = L^2,$$

$$\therefore \; J_1 = \frac{1}{2} L^2. \tag{17}$$

2. Den andra integralen i (15')

$$J_2 = \int_0^{2\pi} \varrho\, d\alpha \int_0^{\pi} y\, d\omega$$

evalueras på följande sätt.

Enligt (3) är

$$\omega = \alpha - \beta,$$

$$\therefore \; J_2 = \int_0^{2\pi} \varrho\, d\alpha \int_{\alpha-\pi}^{\alpha} y\, d\beta.$$

Omvändes integratsjonsårdningen, fås

$$J_2 = \int_{-\pi}^{0} d\beta \int_0^{\beta+\pi} y \varrho\, d\alpha + \int_0^{\pi} d\beta \int_\beta^{\beta+\pi} y \varrho\, d\alpha + \int_\pi^{2\pi} d\beta \int_\beta^{2\pi} y \varrho\, d\alpha.$$

Insätt i den första av dessa integraler

$$\beta = \beta' - 2\pi,$$

så fås, då $y(\alpha, \beta) = y(\alpha, \beta + 2\pi)$,

$$\int_{-\pi}^{0} d\beta \int_0^{\beta+\pi} y \varrho\, d\alpha = \int_\pi^{2\pi} d\beta' \int_0^{\beta'-\pi} y \varrho\, d\alpha.$$

Bårttages aksänten, ock sammanslås denna integral med den tredje, fås

$$J_2 = \int_0^\pi d\beta \int_\beta^{\beta+\pi} y\varrho\, d\alpha + \int_\pi^{2\pi} d\beta \int_0^{2\pi} y\varrho\, d\alpha - \int_\pi^{2\pi} d\beta \int_{\beta-\pi}^{\beta} y\varrho\, d\alpha. \tag{18}$$

Här hava y och ϱ följande betydelse.

Från en punkt på en sluten konväks kontur drages en tanjänt, som bildar med en fiks riktning vinkeln α; ϱ betecknar kröknings-radien i tanjeringspunkten, $\because \varrho\, d\alpha = ds$, då ds betecknar båg-elemäntet i samma punkt. Tag en annan punkt på kurvan till origo för ett polärt koordinatsystem (r, ϑ) ock låt tanjänten i denna punkt vara koordinatsystemets riktningslinje. Kalla den vinkel, denna tanjänt bildar med den fiksa riktningen, för β. Drag från origo en perpendikel mot den först nämda tanjänten. Denna perpendikel är vårt y. Kallas tanjeringspunktens koordinater för r ock ϑ samt vinkeln mellan radius väktor ock tanjänten för φ, så är

$$sin\varphi = r\frac{d\vartheta}{ds},\quad y = r\, sin\varphi = r^2\frac{d\vartheta}{ds},\quad \because\ y\varrho\, d\alpha = y\, ds = r^2 d\vartheta = 2\, dS,$$

då dS är ett elemänt av den av radius väktor beskrivna arean,

$$\because J_2 = 2\int_0^\pi d\beta \int_{\alpha=\beta}^{\alpha=\beta+\pi} dS + 2\int_\pi^{2\pi} d\beta \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} dS - 2\int_\pi^{2\pi} d\beta \int_{\alpha=\beta-\pi}^{\alpha=\beta} dS.$$

Drages en tanjänt paraläll med tanjänten i origo, ock samman-bindas de båda tanjeringspunkterna, så delas den av konturen omslutna ytan i två segmänt, som vi vilja kalla S_0 ock S_1. Hela ytan $S_0 + S_1$ kallas S. Man finner

$$\int_{\alpha=\beta}^{\alpha=\beta+\pi} dS = S_0,\quad \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} dS = S,\quad \int_{\alpha=\beta-\pi}^{\alpha=\beta} dS = S_1,$$

$$\because\ \frac{1}{2} J_2 = \int_0^\pi S_0(\beta)\, d\beta + \int_\pi^{2\pi} S\, d\beta - \int_\pi^{2\pi} S_1(\beta)\, d\beta.$$

Insättes i den tredje av dessa integraler

$$\beta = \beta' + \pi,$$

fås

$$\int_\pi^{2\pi} S_1(\beta)\, d\beta = \int_0^\pi S_1(\beta' + \pi)\, d\beta' = \int_0^\pi S_0(\beta')\, d\beta',$$

ty $S_1(\beta + \pi)$ är $= S_0(\beta)$, varom man lätt övertygar sig med tilljälp av en figur. Den tredje integralen är således lika stor som den första. Den andra integralen är

$$\int_{\pi}^{2\pi} S d\beta = \pi S,$$

emedan S är oberoende av β.

$$\therefore \frac{1}{2} J_2 = \pi S. \qquad (19)$$

Ur (15), (17) ock (19) fås altså slutligen

$$J = \int \Delta\,(\omega - \sin\omega) = \frac{1}{2} L^2 - \pi S,$$

vilket är det sökta uttrycket.

BEVIS FOR, AT EN KURVES HESSESKE KURVE I ALMINDELIGHED IKKE HAR NOGET DOBBELTPUNKT.

(AF E. C. VALENTINER).

Hvis en Kurves Hesseske Kurve i Almindelighed havde et Dobbeltpunkt, saa vilde det kun være to Betingelser for Kurven, at dette Dobbeltpunkt skulde falde i et givet Punkt; er nu Kurven af n'te Orden og dens Ligning i almindelige Parallelkoordinater x og y

$$a_0 + (a_1 x + b_1 y) + (a_2 x^2 + 2b_2\, xy + c_2 y^2) + (a_3 x^3 + 3b_3 x^2 y + 3c_3 xy^2 + d_3 y^3) + \ldots = 0,$$

saa bliver Betingelsen for, at den Hesseske Kurve skal have et Dobbeltpunkt i Begyndelsespunktet, at Leddene af 0'te og og 1ste Grad med Hensyn til x og y i Determinanten

$$\begin{vmatrix} 2a_2 + 6(a_3 x + b_3 y), & 2b_2 + 6(b_3 x + c_3 y), & (n-1)a_1 + 2(n-2)(a_2 x + b_2 y) \\ 2b_2 + 6(b_3 x + c_3 y), & 2c_2 + 6(c_3 x + d_3 y), & (n-1)b_1 + 2(n-2)(b_2 x + c_2 y) \\ (n-1)a_1 + 2(n-2)(a_2 x + b_2 y), & (n-1)b_1 + 2(n-2)(b_2 x + c_2 y), & n(n-1)a_0 + (n-1)(n-2)(a_1 x + b_1 y) \end{vmatrix}$$

forsvinde. Dividere vi denne Determinant med $(n-2)^2$ ved at dividere sidste Pille og sidste Række hver med $n-2$, saa viser

det sig, at Determinanten er den Hesseske Funktion af følgende Funktion af 3die Grad:

$$\frac{n(n-1)}{6(n-2)^2}a_0 + \frac{(n-1)}{2(n-2)}(a_1x+b_1y)+(a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2)+$$
$$(a_3x^3+3b_3x^2y+3c_3xy^2+d_3y^3);$$

sætter man nu

$$\frac{n(n-1)}{6(n-2)^2}a_0 = A_0, \quad \frac{n-1}{2(n-2)}(a_1x+b_1y) \equiv A_1x + B_1y,$$

saa har man den almindelige Funktion af 3die Grad, og for denne vides Antallet af de opstillede Betingelser at være 3; men da der til opgivne Værdier af A_0, A_1, B_1, a_2 o. s. v. altid svarer enkelte fuldstændig bestemte Værdier af a_0, a_1, b_1, a_2 . . ., saa maa Antallet af Betingelsesligninger ogsaa for disse blive 3.

OM BETINGELSERNE FOR, AT DER MELLEM TRE HELE RATIONALE POLYNOMIER, DER ERE HOMOGENE AF SAMME GRAD I TRE VARIABLE, FINDES EN IDENTISK LIGNING.

(af E. C. Valentiner).

Naar der mellem Funktionerne f_1, f_2, f_3 af $x_1 : x_2 : x_3$ finder en Ligning Sted, da er den Jacobiske Funktion

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1}, & \frac{df_2}{dx_1}, & \frac{df_3}{dx_1} \\ \frac{df_1}{dx_2}, & \frac{df_2}{dx_2}, & \frac{df_3}{dx_2} \\ \frac{df_1}{dx_3}, & \frac{df_2}{dx_3}, & \frac{df_3}{dx_3} \end{vmatrix}$$

identisk lig med Nul; thi er Ligningen

$$\varphi(f_1, f_2, f_3) = 0,$$

da har man

$$\frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dx_i} + \frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dx_i} + \frac{d\varphi}{df_3}\cdot\frac{df_3}{dx_i} \equiv 0 \ (i = 1, 2, 3);$$

idet man nu aabenbart kan antage, at ikke $\frac{d\varphi}{df_i} \equiv 0$, saa faar man ved Elimination af $\frac{d\varphi}{df_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ netop $J \equiv 0$.

Betragtes $x_1 : x_2 : x_3$ som Koordinater til et Punkt i en Plan, da er $J = 0$ Betingelsen for, at Punktet (x) skal kunne tages til Dobbeltpunkt paa en Kurve, hvis Ligning er af Formen $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, hvor $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ ere Konstanter; da nu $J \equiv 0$, saa maa ethvert Punkt i Planen kunne tages til Dobbeltpunkt for en saadan Kurve. Den simpleste Maade, hvorpaa dette kan ske, er at Kurverne $f_\lambda \equiv \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ ikke danne et „Net“ men et „Bundt“, idet $k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 \equiv 0$, hvor $k_1\ k_2\ k_3$ ere Konstanter; det antages i det følgende, at dette ikke finder Sted.

Udtages nu to vilkaarlige af Nettets Kurver, $f_\lambda = 0$ og $f_\mu = 0$. da hører ogsaa Kurven $F_{\frac{l}{m}} \equiv l f_\lambda + m f_\mu = 0$, hvor $l : m$ er en vilkaarlig Konstant, til Nettet; tager man endnu en Kurve, $f_\varkappa = 0$. af Nettet, saaledes at ikke $f_\varkappa \equiv F_{\frac{l}{m}}$ for nogen Værdi af l og m, og danner alle mulige Bundter $f_\varkappa + \varrho F_{\frac{l}{m}} = 0$, da faar man alle Kurver i Nettet. Da nu et vilkaarligt Punkt i Planen er Dobbeltpunkt paa en Kurve i Nettet, saa maa der paa Kurverne i hvert af disse Bundter ligge uendelig mange Dobbeltpunkter eller ogsaa maa der findes enkelte Bundter, hvis Kurver alle have Dobbeltgrene; det sidste vil dog let ses at være umuligt, (med mindre Dobbeltgrenene ere fælles for alle Kurverne); tilbage bliver der altsaa at undersøge Bundter, paa hvis Kurver findes (enkelt-) uendelig mange Dobbeltpunkter. Saadanne Bundter maa enten indeholde enkelte Kurver med Dobbeltgrene, eller alle Kurverne i Bundtet maa have Dobbeltpunkter i endeligt Antal; i sidste Tilfælde maa alle Kurverne i Bundtet have en Gren fælles, nemlig det geometriske Sted for Dobbeltpunkterne. Man vil nemlig let se, at to konsekutive Kurver i Bundtet og derfor alle Kurver i Bundtet have et Punkt fælles: Dobbeltpunktet.

Betragte vi nu igjen Bundterne $f_\varkappa + \varrho F_{\frac{l}{m}} = 0$, saa er det

aabenbart, at vi kunne se bort fra det Tilfælde, hvor Kurverne i et Bundt have en fælles Gren; thi denne var da en Gren af $f_\varkappa = 0$, altsaa en fast Gren; følgelig maa der i hvert af Bundterne være Kurver med Dobbeltgrene, altsaa i Nettet $f_\lambda \equiv 0$ uendelig mange saadanne Kurver.

Det kan nu bemærkes, at en Kurve i Nettet er fuldstændig bestemt ved at skulle have et opgivet, vilkaarlig valgt Punkt til Dobbeltpunkt; thi Betingelsesligningerne blive af 1ste Grad med Hensyn til $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ og kunne ikke reducere sig til 1 Betingelse, da saa øjensynlig alle Kurver i Nettet maatte have Dobbeltgrene; heraf fremgaar, at Dobbeltgrenene danne et System af Kurver, hvoraf der gaar 1 gjennem hvert Punkt i Planen; man kan da indse, at de maa danne et Bundt.

Er nu dette Bundt $p + \varrho q = 0$, hvor ϱ er ubestemt, da er Nettet $\lambda up^2 + \mu vq^2 + w(p + \varkappa q)^2 = 0$, hvor λ og μ ere Parametrene; man maa da kunne give λ og μ saadanne Værdier, at $\lambda up^2 + \mu vq^2 + w(p + \varkappa q)^2 \equiv m(p + \varrho q)^2$, hvor ϱ kan være et hvilket som helst Tal; λ, μ og m ere Funktioner af ϱ. Differentieres Ligningen med Hensyn til ϱ, saa faar man

$$\frac{d\lambda}{d\varrho} up^2 + \frac{d\mu}{d\varrho} vq^2 \equiv \frac{dm}{d\varrho}(p + \varrho q)^2 + 2m(p + \varrho q) \cdot q;$$

heraf ser man, at $p + \varrho q$ skal være Faktor i en Funktion af Formen $Pup^2 + Qvq^2$, naar P og Q ere (af ϱ afhængige) Konstanter; altsaa maa for $p + \varrho q = 0$ ogsaa Ligningen $\varrho^2 Pu + Qv = 0$ finde Sted, eller Kurven $u + bv = 0$ maa ved passende Valg af b kunne bringes til at indeholde Grenen $p + \varrho q = 0$; enten er da $u \equiv Kv$, hvor K er konstant, eller u og v maa begge indeholde en Faktor af Formen $p + \varrho q$. I første Tilfælde have to vilkaarlige Kurver med Dobbeltgren, altsaa alle Kurver i Nettet, en fælles Gren, dette Tilfælde kunne vi derfor se bort fra; i andet Tilfælde maa $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ dele sig i Grene $p + \varrho q = 0$ og andre Grene, og om disse vil da gjælde det samme som om $u = 0$, $v = 0$ og $w = 0$. Nettet faar altsaa til Ligning

$$u \,.\, F(p, q) = 0,$$

hvor u, p og q ere givne Funktioner af (x) og $F(p, q)$ en hel,

rational, homogen Funktion af p og q, hvis Koefficienter afhænge lineært af 2 Parametre.

Af det foregaaende ser man, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at der mellem tre Funktioner af samme Grad existerer en identisk Ligning, er, at deres Jacobi'ske Funktion er Nul. Er Ligningen $\varphi(f_1 f_2 f_3) = 0$, da vil $\varphi(x_1 x_2 x_3) = 0$ være en rational Kurve, hvis Grad er en Faktor i n, naar n er Graden af f_1, f_2 og f_3, befriede fra deres fælles Faktorer.

UENDELIG FJERNE RUMELEMENTER.

(AF L. ANKJÆR).

Den rene Projektivgeometri er bygget paa de første deskriptive Egenskaber ved Punkt, Plan og ret Linie. Heraf indses rent abstrakt Muligheden af at opbygge en Theori, formelt analog med Projektivgeometrien, for visse Elementer, for hvilke der gjælder Sætninger, formelt analoge med de første deskriptive Sætninger om Punkt, Plan og ret Linie. Det gjælder blot om at finde saadanne Elementer, og det har man gjort paa to Punkter indenfor Geometrien, nemlig først i de saakaldte uendelig fjerne og derpaa i de saakaldte imaginære Rumelementer. Og det er at mærke, at ikke alene give de nævnte Elementer, betragtede under denne Analogis Synspunkt, altsaa strax en hel Theori, der har Interesse som en Theori om dem; men netop ved den Analogi i Udtrykkene, der beroer paa, at vi anvende Betegnelsen Punkt, Plan og ret Linie fra det gamle Omraade paa det ny Omraade, vil det vise sig, at de nye Theorier komme til at udfylde Huller og Ujævnheder i Projektivgeometriens Anvendelse paa det Euklidiske Rum.

De deskriptive Grundsætninger for de Punkter, Planer og rette Linier, hvormed Projektivgeometrien opererer, ere disse:

To Punkter bestemme én og kun én ret Linie.

To Planer bestemme én og kun én ret Linie.

Et Punkt og en Linie bestemme én og kun én Plan.

En Plan og en Linie bestemme ét og kun ét Punkt.

Herpaa opbygges Projektivgeometriens System, og herved er allerede Dualitetsprincipet givet.

Men naar man vil anvende dette System paa det Euklidiske Rum, saa have disse Grundsætninger kun begrænset Gyldighed; det kan hænde, at to Planer ingen Linie bestemme, og at en Plan og en ret Linie intet Punkt bestemme; men ellers passe Sætningerne. Uoverensstemmelserne ligge i det Fænomen, vi kalde Parallelisme.

To rette Linier ere parallele, naar de ligge i samme Plan og ikke skjære hinanden.

To Planer ere parallele, naar de ikke skjære hinanden.

En ret Linie og en Plan ere parallele, naar de ikke skjære hinanden.

Igjennem et Punkt kan drages én og kun én Linie, parallel med en given.

Ud fra denne Hovedsætning kan bevises flere andre, saasom: Naar to Linier ere parallele med samme tredie, ere de indbyrdes parallele, og den samme Sætning om Planer.

Vi ville nu ved et uendelig fjærnt Punkt uden videre forstaa et uendeligt System af parallele Linier.

Det, at et uendelig fjernt Punkt ligger paa en ret Linie, vil sige, at Liniesystemet er parallelt med Linien.

Altsaa har enhver ret Linie ét og kun ét uendelig fjernt Punkt. Thi dette er kun en Oversættelse af den Sætning, at enhver ret Linie bestemmer ét og kun ét System af parallele Linier.

At et uendelig fjernt Punkt ligger i en Plan, vil sige, at Liniesystemet er parallelt med Planen.

Parallele Planer have altsaa samme uendelig fjerne Punkter. Da Systemet af fælles Punkter for to Planer i Almindelighed danner en ret Linie, vil det være naturligt at kalde dette System af uendelig fjerne Punkter, som er fælles for parallele Planer, en uendelig fjern ret Linie. Enhver Plan har altsaa én og kun

én uendelig fjern ret Linie, og en saadan er fremstillet ved et System af parallele Planer.

Det hele System af uendelig fjerne Punkter i Rummet kalde vi naturlig den uendelig fjerne Plan, da dette System „skjæres“ af enhver Plan i en uendelig fjern ret Linie.

Det er nu en simpel Ting at vise, at de 4 deskriptive Sætninger gjælde, naar de uendelig fjerne Elementer optages i Systemet; men Overensstemmelsen er som før nævnt, fuldstændig formel og beror alene paa et heldigt System af Benævnelser.

F. Ex. To Punkter bestemme én og kun én Linie. Er det ene Punkt uendelig fjernt, skal Linien være parallel med det paagjældende Liniesystem og er bestemt, naar den skal gaa igjennem et givet Punkt. Ere begge Punkter uendelig fjerne, bestemme de to Liniesystemer et System af parallele Planer, der fremstille en uendelig fjærn Linie o. s. v.

Naar de 4 Sætninger ere beviste for alle „Punkter“, „Planer“ og „Linier“, kan man uden videre overføre Projektivgeometrien paa det Euklidiske Rum.

Ved denne Overførelse ville nu omvendt Sætninger, som vi have bevist almindelig under et, bag efter ved at antage deri indgaaende Elementer for uendelig fjerne, kunne spaltes i interessante Sætninger. Størst Betydning faar dette i Keglesnitslæren, hvor den uendelig fjerne Linies Pol, Centrum, spiller en meget vigtig Rolle, og hvor Keglesnittene, der ere definerede som Punkt- og Liniefrembringelser formedelst projektiviske Elementrækker, inddeles i tre Arter, eftersom de skjære den uendelig fjerne Linie i 2 Punkter, røre den, ɔ: skjære den i sammenfaldende Punkter, eller ikke skjære den. Herved faas Hyperbler, Parabler og Ellipser.

De sidste ses senere at kunne karakteriseres som Keglesnit, der skjære den uendelig fjerne Linie i imaginære Punkter, naar vi først have indført imaginære Elementer ved det samme ovenfor fremhævede Princip, nemlig, at f o r m e l t a n a l o g e P r æ m i s s e r g i v e f o r m e l t a n a l o g e K o n k l u s i o n e r.

Det er, hvad vi kunne kalde S y m b o l i s e r i n g e n s Princip, og det er det samme, der f. Ex. i Analysen har skabt de symbolske

Theorier for Differentialligninger og i den analytiske Projektivgeometri den symbolske Invarianttheori, ligesom det i Virkeligheden er det, vi skylde Dualitetsprincipet, overalt betydningsfulde, vidtrækkende Synspunkter.

LØSNING AF EN OPGAVE.

(AF L. ANKJÆR).

Opgaven, som er en Generalisation af en Opgave, der findes i Sturm's Cours d'analyse, er følgende:

Angiv under anskuelig Form Betingelsen for, at en given Funktion af de indbyrdes Afstande mellem en Samling Punkter, af hvilke hvert er bundet til at bevæge sig paa en given Rumkurve eller Flade, er Minimum eller Maximum. — Specielt betragtes det Tilfælde, at nogle af Punkterne ere frit bevægelige eller faste.

Lad Punkterne være $P_1, P_2, \ldots P_n$, hvor P_i har Koordinaterne x_i, y_i, z_i, og lad Afstanden mellem P_i og P_k være ϱ_{ik}, medens den givne Funktion er

$$u = F(\varrho_{12}, \varrho_{13}, \ldots \varrho_{1n}, \varrho_{23}, \varrho_{24}, \ldots \varrho_{2n}, \ldots \varrho_{n-1,n}).$$

Betingelsen for Minimum eller Maximum er da, at u's partielle Differentialkvotienter med Hensyn til de deri indgaaende uafhængige variable forsvinde.

Lad P_i være bundet til at bevæge sig paa en vis Rumkurve. Man faar da Betingelsesligningen

$$\Sigma \frac{dF}{d\varrho_{ik}} \left(\frac{d\varrho_{ik}}{dx_i} dx_i + \frac{d\varrho_{ik}}{dy_i} dy_i + \frac{d\varrho_{ik}}{dz_i} dz_i \right) = 0,$$

hvor Tegnet Σ betyder, at man for k efterhaanden skal indsætte Værdierne $1, 2, \ldots i-1, i+2, \ldots n$ og addere. dx_i, dy_i, dz_i ere Differentialer med Hensyn til den variable Parameter, hvoraf Koordinaterne for Rumkurvens Punkter tænkes givne som Funktioner. Da $\varrho_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}$, har man $\frac{d\varrho_{ik}}{dx_i} = \frac{x_i - x_k}{\varrho_{ik}}$ o. s. v., saa at Ligningen kan skrives

$$dx_i \Sigma \frac{dF}{d\varrho_{ik}} \frac{x_i - x_k}{\varrho_{ik}} + dy_i \Sigma \frac{dF}{d\varrho_{ik}} \frac{y_i - y_k}{\varrho_{ik}} + dz_i \Sigma \frac{dF}{d\varrho_{ik}} \frac{z_i - z_k}{\varrho_{ik}} = 0$$

eller

$$dx_i \Sigma \frac{dF}{d\varrho_{ik}} \frac{x_k - x_i}{\varrho_{ik}} + dy_i \Sigma \frac{dF}{d\varrho_{ik}} \frac{y_k - y_i}{\varrho_{ik}} + dz_i \Sigma \frac{dF}{d\varrho_{ik}} \frac{z_k - z_i}{\varrho_{ik}} = 0.$$

Størrelserne $\frac{x_k - x_i}{\varrho_{ik}}$, $\frac{y_k - y_i}{\varrho_{ik}}$, $\frac{z_k - z_i}{\varrho_{ik}}$ ere imidlertid Retningscosinuserne for Linien $P_i P_k$. Deraf ses, at naar man, gaaende ud fra P_i, afsætter Linier af Størrelserne $\frac{dF}{d\varrho_{i1}}$, $\frac{dF}{d\varrho_{i2}}$, ... $\frac{dF}{d\varrho_{in}}$ og med samme Retninger som Linierne $\varrho_{i1}, \varrho_{i2}, \ldots \varrho_{in}$ efter hinanden som Polygonsider, hvorved vi ville antage, at vi komme til Punktet (X_i, Y_i, Z_i), saa ere Koefficienterne til dx_i, dy_i, dz_i i ovenstaaende Ligning denne Polygonperimeters Projektioner paa de tre Axer. Disse Projektioner ere nu efter en bekjendt Sætning de samme som Projektionerne af Forbindelseslinien R_i mellem P_i og (X_i, Y_i, Z_i). Denne Linie R_i er imidlertid efter en bekjendt Sætning i Mekaniken i Størrelse og Retning Resultanten, naar P_i angribes af Kræfterne $\frac{dF}{d\varrho_{ik}}$, virkende i Retningerne $P_i P_k$. Ligningen ovenfor bliver, som man ser,

$$(X_i - x_i)\, dx_i + (Y_i - y_i)\, dy_i + (Z_i - z_i)\, dz_i = 0,$$

men da dette, naar X_i, Y_i, Z_i betragtes som løbende Koordinater, er Ligningen for Rumkurvens Normalplan i P_i, udtrykker Ligningen ovenfor, at naar P_i angribes af Kræfter med Størrelsen $\frac{dF}{d\varrho_{ik}}$ og virkende i Retningerne $P_i P_k$, maa Resultanten af disse Kræfter være vinkelret paa Rumkurven i P_i.

Dersom P_i er bundet til at bevæge sig paa en Flade, er den eneste Forskjel, at vi i Stedet for en faa to Ligninger

$$(X_i - x_i)\, dx_i + (Y_i - y_i)\, dy_i + (Z_i - z_i)\, dz_i = 0,$$

idet Differentialerne i den ene ere tagne med Hensyn til den ene og i den anden med Hensyn til den anden af de to uafhængige variable, af hvilke Koordinaterne for Fladens Punkter tænkes givne

som Funktioner. Men disse to Ligninger ere Ligningerne for Fladens Normal i P_i.

Er P_i et frit bevægeligt Punkt, deler, eftersom x_i, y_i og z_i da ere 3 uafhængige variable, Ligningen ovenfor sig i de tre

$$\Sigma \frac{dF}{d\varrho_{ik}} \frac{x_k - x_i}{\varrho_{ik}} = 0, \quad \Sigma \frac{dF}{d\varrho_{ik}} \frac{y_k - y_i}{\varrho_{ik}} = 0, \quad \Sigma \frac{dF}{d\varrho_{ik}} \frac{z_k - z_i}{\varrho_{ik}} = 0,$$

og dette medfører, som man ser, at den omtalte Kraftpolygon er lukket, altsaa at der er Ligevægt.

Man kan sammenfatte dette i følgende Sætning:

Naar Punktet P_i paavirkes af Kræfterne $\frac{dF}{d\varrho_{ik}}$, virkende i Retningerne $P_i P_k$, maa Resultanten være vinkelret paa den Rumkurve eller Flade, hvorpaa P_i er bundet til at bevæge sig, og dersom P_i er frit bevægeligt, maa der være Ligevægt.

Dersom et af Punkterne er fast, etablerer det ikke nogen Betingelse.

EXAMENSOPGAVER.

Adgangsexamen til Polyteknisk Læreanstalt. Juni 1888.

1. Man skal tegne en Trekant kongruent med en given Trekant saaledes, at den søgte Trekants Sider røre hver sin af tre givne, lige store Cirkler. Hver Side i den søgte Trekant skal have sin tilhørende Cirkel og sin modstaaende Vinkelspids paa modsatte Sider af sig.

Opl. Man kan tænke sig Opgaven løst og derefter forskyde Siderne i Trekanten parallelt mad deres oprindelige Stillinger et Stykke lig den givne Radius, saaledes, at hver Trekantside kommer til at gaa gjennem sin tilhørende Cirkels Centrum. Man faar derved en Trekant, som let kan tegnes ved Hjælp af den givne Trekant. Opgaven er da reduceret til at tegne en Trekant kongruent med en given Trekant saaledes, at Siderne gaa gjennem tre givne Punkter.

Løsningen af denne Opgave afhænger igjen af, at tegne et Segment over en given Linie som Korde og rummende en given Vinkel, og at drage gjennem to Cirklers ene Skjæringspunkt en Linie, hvoraf de to Cirkler afskjære Korder med given Differens. (Korderne ere regnede med Fortegn fra Cirklernes Skjæringspunkt). Se „Methoder og Theorier“, Side 60.

Det vil ikke gjøre Opgaven vanskeligere, hvis de givne Cirkler ere ulige store.

2. Ved

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n, \ldots$$

betegnes en Række positive Tal. For a_3 og alle følgende Led i Rækken gjælder den Lov, at ethvert Led i Rækken er Mellemproportional mellem de to nærmest foregaaende. Man skal bevise Rigtigheden af følgende Formler:

$$a_n \sqrt{a_{n-1}} = a_2 \sqrt{a_1},$$

$$a_n = a_2^{\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)} \cdot a_1^{\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)}$$

og finde

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n},$$

udtrykt ved a_1, a_2 og n.

Til hvilke Grænseværdier nærme

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \text{ og } a_n$$

sig, naar n voxer i det uendelige?

(I det ovenfor angivne Udtryk for a_n er der kun Tale om den reelle, positive Værdi af Størrelsen paa højre Side af Lighedstegnet).

Opl. Beviserne for de to første Formler kunne føres ved Induktion; men man kan ogsaa gaa saaledes frem, at man finder de to Formler alene ved Talrækkens givne Definition. Man har:

$$a_3 = \sqrt{a_1 a_2},$$

$$a_4 = \sqrt{a_2 a_3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}.$$

Af disse Ligninger frembringes ved Multiplikation:

$$a_{n-1}\, a_n = a_2 \sqrt{a_1} \sqrt{a_{n-1}},$$

$$a_n \sqrt{a_{n-1}} = a_2 \sqrt{a_1}.$$

Her sættes efterhaanden $n = 2, 3 \ldots$ Da faas:

$$a_2 \sqrt{a_1} = a_2 \sqrt{a_1},$$

$$a_3 \sqrt{a_2} = a_2 \sqrt{a_1},$$

$$a_4 \sqrt{a_3} = a_2 \sqrt{a_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n \sqrt{a_{n-1}} = a_2 \sqrt{a_1}.$$

I disse Ligninger opløftes efter Orden til Potenser, hvis Exponenter ere:

$$1,\ -2,\ (-2)^2, \ldots\ (-2)^{n-2}.$$

Ved Multiplikation faar man da:

$$a_n^{(-2)^{n-2}} \cdot \sqrt{a_1} = (a_2 \sqrt{a_1})^{\frac{(-2)^{n-1}-1}{-3}}$$

Heraf findes:

$$a_n = a_2^{\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)} \cdot a_1^{\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)}.$$

Denne Formel kan nu benyttes til Beregning af

$$\sqrt[n]{a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n},$$

som findes lig med:

$$a_1^{\frac{1}{3}+\frac{4}{9n}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{9n}} \cdot a_2^{\frac{2}{3}-\frac{4}{9n}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{9n}}.$$

For $n = \infty$ bliver baade denne Størrelse og a_n til:

$$a_1^{\frac{1}{3}}\, a_2^{\frac{2}{3}}.$$

3. I et Tetraeder ere tre i et Hjørne sammenstødende Kanter saaledes givne:

$$a = 11{,}214,\quad b = 13{,}715,\quad c = 15{,}713.$$

Vinklen mellem a og b er $15^0\ 22'\ 36''$.

Vinklen mellem b og c er $53^0\ 7'\ 48''$.

Vinklen mellem a og c er $64^0\ 25'\ 2''$.

Find Tetraedrets ubekjendte Kanter og Arealet af den Trekant, de indeslutte.

Opl. Naar de ubekjendte Kanter beregnes ved Formlerne (57) i Jul. Petersens Trigonometri, faar man:

4,155(2), 13,282, 14,848.

Arealet findes da lig 26,777.

4. En Ellipse er given ved sin Ligning i retvinklede Koordinater.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a > b.$$

1) Man skal finde Ligningen for en Tangent til Ellipsen saaledes bestemt, at den vinkelrette paa Tangenten fra Centrum danner Vinklen α med Ellipsens store Axe.

2) Hvilke Koordinater har Ellipsens Centrum, naar man til den ene Koordinataxe tager den i 1) nævnte Tangent og til den anden Koordinataxe en Tangent, vinkelret paa den første? (Ellipsen skal være saaledes beliggende i det nye Koordinatsystem, at intet af dens Punkter har nogen negativ Koordinat).

3) Hvilken Kurve beskriver Ellipsens Centrum, naar Ellipsen glider saaledes, at den bestandig rører de to under 2) nævnte Koordinataxer?

4) Hvilken Ligning har Ellipsen i det under 2) nævnte Koordinatsystem?

Opl. Ligningen for den i 1) omtalte Tangent er:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} = 0.$$

Der er to Tangenter, men her benyttes kun den, som svarer til det øverste Tegn.

En Tangent vinkelret paa den første er:

$$- x \sin \alpha + y \cos \alpha + \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} = 0.$$

Tangenternes Afstande fra Centrum ere de i 2) omspurgte Koordinater. Disse ere:

$$Y = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}, \quad X = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}.$$

Det i 3) omspurgte geometriske Sted er bestemt ved:

$$X^2 + Y^2 = a^2 + b^2.$$

I det oprindelige System ere Afstandene fra Tangenterne til et Punkt i Ellipsen:

$$Y = x \cos a + y \sin a + \sqrt{a^2 \cos^2 a + b^2 \sin^2 a}.$$

$$X = -x \sin a + y \cos a + \sqrt{a^2 \sin^2 a + b^2 \cos^2 a}.$$

Disse ere det vedkommende Punkts Koordinater i det nye System. Elimineres x og y mellem de to sidste Ligninger og Ellipsens givne Ligning, faas som ny Ligning for Ellipsen:

$$(Y - \delta_1)^2 \left(\frac{\cos^2 a}{a^2} + \frac{\sin^2 a}{b^2}\right) + (X - \delta_2)^2 \left(\frac{\sin^2 a}{a^2} + \frac{\cos^2 a}{b^2}\right)$$

$$+ 2 \sin a \cos a (Y - \delta_1)(X - \delta_2)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 1,$$

hvor $\delta_1 = \sqrt{a^2 \cos^2 a + b^2 \sin^2 a}$, $\delta_2 = \sqrt{a^2 \sin^2 a + b^2 \cos^2 a}$.

Alm. Forberedelses- og IV. Klasses Examen. Marts 1888.

Arithmetik.

1. En Mand laaner Penge til $4\frac{1}{2}$ Procent aarlig Rente og Rentes Rente. Laanets Størrelse er 12000 Kr., og af disse betaler han Renterne ved Slutningen af hvert af de 4 første Aar. Derpaa betaler han intet før ved Udgangen af det 8de Aar, hvor han betaler 12000 Kr. Han afgjør nu Resten af Gjælden, idet han ved Udgangen af hvert af de 2 næste Aar betaler en vis Sum a. Find a.

2. Find x og y af Ligningerne:

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{0{,}25}} = 8, \quad \sqrt[x]{0{,}25^y} = 4096$$

og prøv Rigtigheden af de fundne Værdier.

Løsningen af Ligningerne maa helst udføres uden Brug af Logarithmer.

3. Det midterste Led i en Differensrække paa 7 Led, hvori a og b ere første og sidste Led, er 65; det midterste Led i en Kvotientrække paa 7 Led, hvori a og b ere første og sidste Led, er 16. Find a og b samt Differensrækkens Differens og Kvotientrækkens Kvotient.

Opl. 1. Efter 8 Aars Forløb er Gjælden Kr. $12000 \cdot (1{,}045)^4$ = Kr. 14310,00. a findes af Ligningen:

$$(2310 \,.\, 1{,}045 - a)\, 1{,}045 = a.$$

$$a = \frac{2310 \,.\, (1{,}045)^2}{2{,}045} = 1233{,}51.$$

Opl. 2. $2^{-\frac{2}{xy}} = 2^3$ og $2^{\frac{-2y}{x}} = 2^{12}$ giver $xy = -\frac{2}{3}$ og

$\frac{y}{x} = -6$, hvoraf $x = \pm\frac{1}{3}$ og $y = \mp 2$.

Opl. 3. Kaldes Differensrækkens Differens d og Kvotientrækkens Kvotient q, faas:

$$\begin{array}{r} a + 3d = 65 \\ b - 3d = 65 \\ \hline a + b = 130 \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{r} a \,.\, q^3 = 16 \\ \frac{b}{q^3} = 16 \\ \hline ab = 256. \end{array}$$

a og b findes som Rødder i Ligningen:

$$z^2 - 130z + 256 = 0,$$

altsaa

$$a = \begin{cases} 128 \\ 2 \end{cases} \text{og} \quad b = \begin{cases} 2 \\ 128, \end{cases}$$

hvortil svarer:

$$d = \mp 21 \quad \text{og} \quad q = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 2. \end{cases}$$

Geometri.

1. I en Trekant ABC er O Centrum for den indskrevne Cirkel. Bevis, at den Cirkel, der er omskreven Trekanten AOB, har sit Centrum P midt i den Linie, der forbinder O med Centrum for den ydre Røringscirkel, der rører selve Siden AB og de andres Forlængelser, samt at P ligger paa Periferien af Trekant ABC's omskrevne Cirkel.

2. Tre Punkter A, B og O ere givne; tegn et Kvadrat saaledes, at O bliver dets Midtpunkt, medens 2 af Kvadratets sammenstødende Sider gaa den ene gjennem A og den anden gjennem B.

3. I en Trekant ABC er givet: $\angle A = 30^0$, $AB = 100$ Fod, $BC = 130$ Fod. Find Trekantens Areal og Radius i dens omskrevne Cirkel.

Opl. 1. Kaldes Centret for den ydre Røringscirkel O_1, følger den første Sætning af, at Vinklerne OAO_1 og OBO_1 ere rette. Den anden indses ved, at $\angle APB = 2 \, . \angle AO_1B = 2\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$ $= 180^0 - C$.

Opl. 2. Den Vinkelspids C, hvori de 2 Sider støde sammen, ligger i et Skjæringspunkt mellem 2 Cirkelbuer, der rumme Vinklen 45^0 over AO og BO som Korder.

Opl. 3. Da Højden BD paa AC er $= 50$ Fod, faas $AD = 50\sqrt{3}$ Fod, $CD = 120$ Fod, altsaa Arealet $T = 25\,(50\sqrt{3} + 120)$ □ Fod $= 5165{,}1$ □ Fod, og Radius $R = \frac{100\,.\,130}{2\,.\,50}$ Fod $= 130$ Fod.

Praktisk Regning.

1. Paa en 4,2 Mil lang Jernbanestrækning befordres i et Aar 511 Passagerer paa 1ste, 1229 paa 2den og 5570 paa 3die Klasse. Billetpriserne paa de 3 Klasser ere henholdsvis 60, 40 og 25 Øre pr. Mil. Hvis Jernbanen i det næste Aar kun holder 2 Klasser med Billetpriserne 50 og 35 Øre pr. 10 Kilometre, hvad blive saa Priserne for hele Strækningen paa de 2 Klasser, idet Brøkdele af Øre bortkastes? Med hvor mange Procent vil Indtægten af Billetsalget med disse Priser stige i dette Aar, hvis Passagerantallet stiger med 20 Procent, og der kjører dobbelt saa mange Passagerer paa den billigste Klasse som paa den dyreste?

1 Mil = 7,532 Kilometre.

2. En Metalklump, bestaaende af Jern og Kobber, har sit Rumfang = 1,0625 Kubikfod og vejer 507,56 Pd. Bestod den alene af Jern eller alene af Kobber, vilde den veje henholdsvis 474,81 Pd. og 586,16 Pd. Hvor store Rumfang Jern og Kobber indeholder Klumpen?

Opl. 1. Indtægten i det første Aar er:

Paa 1ste Klasse:	Kr.	1287,72
— 2den Klasse:	—	2064,72
— 3die Klasse:	—	5848,50
	Kr.	9200,94

Da Afstanden er $= 31,6344$ Kilometre, blive Billetpriserne det næste Aar Kr. 1,58 paa den dyreste og Kr. 1,10 paa den billigste Klasse. Passagerantallet det 2det Aar bliver $1,2 \,.\, 7310 = 8772$, hvoraf 1 Trediedel $= 2924$ kjører paa den dyreste og 2 Trediedele $= 5848$ paa den billigste Klasse. Indtægten paa de 2 Klasser bliver altsaa i det andet Aar:

$$\begin{array}{rl} \text{Kr. } 2924 \,.\, 1,58 = & \text{Kr. } 4619,92 \\ \text{Kr. } 5848 \,.\, 1,10 = & \text{Kr. } 6432,80 \\ \hline \text{ialt} & \text{Kr. } 11052,72 \end{array}$$

Merindtægten i det andet Aar er følgelig Kr. 1851,78, der af 1ste Aars Indtægt udgjør $\frac{185178}{9200 \,.\, 94} = 20,125$ pCt.

Opl. 2. Kaldes de søgte Rumfang x og y Kubikfod, har man:

$$x + y = 1,0625,$$

$$\frac{x}{1,0625} \,.\, 474,81 + \frac{y}{1,0625} \,.\, 586,16 = 507,56,$$

hvoraf findes:

$$x = 1,0625 \,.\, \frac{586,16 - 507,56}{586,16 - 474,81} = \frac{3}{4},$$

$$y = 1,0625 \,.\, \frac{507,56 - 474,81}{586,16 - 474,81} = \frac{5}{16}.$$

OPGAVE TIL LØSNING.

560. Find Summen af Rækken:

$$\frac{1}{(-3).(-1).1.3} - \frac{2x^2}{(-1).1.3.5} + \frac{2x^4}{1.3.5.7} - \frac{2x^6}{3.5.7.9} + \ldots,$$

hvor for $n > 0$ det almindelige Led er

$$(-1)^n \,.\, \frac{2x^{2n}}{(4n^2-1)(4n^2-9)}.$$

(T. N. Thiele).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von — Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

Hermed en Figurtavle, hørende til Cand. *P. Vedels* Afhandling i forrige Hefte.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

Sjette Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1888.

TREDIE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Alhambravej 6, Kjøbenhavn, V.

EN ENGELSK INTEGRATOR[1]).

(AF C. CRONE).

Den Regnemaskine — The harmonic analyser kaldet — der her skal beskrives, er opstillet i Meteorological Office i London, og dens Bestemmelse er at danne en Rækkeudvikling af Formen:

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_1 \cos 2x + b_2 \sin 2x \ldots$$

for en Funktion, der er grafisk fremstillet som en Kurve i et retvinklet Koordinatsystem.

Maskinen er opfunden af Sir William Thomson, men han er bleven ledet til den ved en Integrator, konstrueret af hans Broder James Thomson. Jeg skal beskrive denne Integrator først, da det er dens Princip, der i en noget udvidet Form ligger til Grund for W. Thomsons harmonic analyser.

En cirkelrund Skive *a* (s. Fig.), der danner en Vinkel paa omtrent 45° med Horisontalplanen, kan dreje sig om en Axe vinkelret paa dens Plan i Centrum. En Omdrejningscylinder *b* er anbragt over Skiven saaledes, at dens Axe, der er vandret og parallel med Skivens Plan, har en Afstand fra denne Plan lidt større end Cylindrens Radius. Cylinderen, der kan dreje sig om sin Axe, er forsynet med en Inddeling, saa man til enhver Tid kan aflæse den Vinkel, den har drejet sig. En tung Kugle *c* hviler paa Skiven og Cylinderen, idet den berører dem begge. Paa en med Cylinderens Axe parallel Stang *d*; der løber mellem Ruller *e*, saa den kan forskydes i sin egen Retning, er anbragt en Gaffel *f*, hvis Grene berører Kuglen løst i Endepunkterne af en Diameter parallel med Cylinderens Axe. Naar Stangen forskydes, tvinger Gaffelen Kuglen til at rulle paa Skiven og Cylinderen, medens den iøvrigt frit kan dreje sig om enhver Diameter. Ved Gnidningsmodstanden vil en Drejning af Skiven medføre en Drejning af Kuglen, der saa igjen drejer Cylinderen. Det Areal, der skal be-

---

[1]) Hertil en Figurtavle.

stemmes, og som tænkes begrænset af en Kurve, 2 Ordinater og et Stykke af Abscisseaxen i et retvinklet Koordinatsystem, vikles om en Omdrejningscylinder, hvis Axe er parallel med Stangen d, saaledes, at Abscisseaxen er vinkelret paa Cylinderfrembringerne. Ved en Tandhjulsforbindelse er sørget for, at Skiven, naar denne Cylinder drejes om sin Axe, drejer sig den samme Vinkel. Den, der betjener Maskinen, skal foruden at dreje Cylinderen, hvorom Kurven er viklet, passe, at en paa den forskydelige Stang anbragt Spids stadig følger Kurven. Peger Spidsen paa et Punkt af Abscisseaxen, skal Kuglens Røringspunkt med Skiven ligge i den Diameter i Skiven, der er vinkelret paa de vandrette Linier i Skivens Plan.

Peger Spidsen paa et Punkt af Kurven med Abscissen x, har Cylinderen, hvorom Kurven er viklet, og altsaa ogsaa Skiven, drejet sig en med x proportional Vinkel. I det følgende antages Vinklen $= x$, altsaa Abscisserne, maalt med Cylinderens Radius som Enhed. Kaldes Afstanden fra Kuglens Røringspunkt med Skiven til den nylig omtalte Diameter g, og den Vinkel, som Cylinderen, hvorpaa Kuglen hviler, har drejet sig, χ, vil man uden Vanskelighed indse Rigtigheden af Relationen:

$$g\,dx = k\,.\,d\chi \text{ eller } g = k\frac{d\chi}{dx},$$

hvor k er en Konstant. Denne Konstant, der bestemmes ved Forsøg, vil jeg i det følgende udelade. Da nu $g =$ Kurvens Ordinat y, faas det søgte Areal $\int_0^x y\,dx = \chi$ ved Aflæsning paa den inddelte Cylinder.

William Thomson, som allerede længe havde bestræbt sig for at konstruere en Maskine, der kunde give en Fouriersk Rækkeudvikling som Udtryk for en grafisk fremstillet Funktion, saa strax, da hans Broder gav ham Beskrivelsen af sin Integrator, at han her havde et Princip, han kunde bruge. Til Bestemmelse af Koefficienterne i en Fouriersk Række:

$$\psi(x) = H_1\,\varphi_1(x) + H_2\,\varphi_2(x) + \ldots,$$

hvor det forudsættes, at

$$\int_0^l \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0, \int_0^l \varphi_1(x)\varphi_3(x)dx = 0, \int_0^l \varphi_2(x)\varphi_3(x)dx = 0,$$

o. s. v.

tjene Ligningerne:

$$H_1 = \frac{\int_0^l \varphi_1(x)\psi(x)\,dx}{\int_0^l (\varphi_1(x))^2\,dx}, \quad H_2 = \frac{\int_0^l \varphi_2(x)\psi(x)\,dx}{\int_0^l (\varphi_2(x))^2\,dx}$$

o. s. v.

og det kom følgelig an paa at finde en Maskine, der kunde give Værdien af $\int_0^x \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$, hvor $\varphi(x)$ er en analytisk bekjendt Funktion, medens $\psi(x)$ er givet ved sin grafiske Fremstilling. Dette vilde Integratoren kunne gjøre, hvis den blev modificeret saaledes, at man havde:

$$g = \frac{d\chi}{\varphi(x)\,dx},$$

d. v. s., at Skiven havde drejet sig Vinklen $\int_0^x \varphi(x)dx$, naar Spidsen pegede paa et Punkt med Abscissen x. Som et i alle Tilfælde brugeligt Arrangement tænkte W. Thomson sig følgende: Om forskjellige Dele af samme Cylinder vikles 2 Kurver, den ene fremstillende $y = \psi(x)$, den anden $y = \int_0^x \varphi(x)\,dx$. Parallelt med Cylinderens Axe er anbragt 2 Stænger, der kunne forskydes langs sig selv og ere forsynede med 2 Spidser, der skulle følge hver sin af Kurvene. Den første af disse Stænger forskyder ved Hjælp af en Gaffel Integratorens Kugle, medens den anden — ved Tænder anbragte paa den og Skiven — drejer Skiven en Vinkel proportional med sin egen Forskydning.

Ved the harmonic analyser er

$\varphi_1(x) = \sin x,\ \varphi_2(x) = \cos x,\ \varphi_3(x) = \sin 2x$ o. s. v.,

og her udfandt W. Thomson følgende simplere Maade, hvorpaa man kunde forbinde den Cylinder, hvorom Kurven er

viklet, med forskjellige Skiver, saaledes, at disses Drejningsvinkler blive proportionale med $cos\ x$, $sin\ x$, $cos\ 2\ x$ o. s. v. Skiverne ere Tandhjul, der drives af Tandstænger g, beliggende i Skivernes Planer og vinkelrette paa deres vandrette Diametre. Tandstængerne hvile paa Ruller h, og deres Vægt kontrabalanceres af Modvægte forbundne med Tandstængerne ved Snore, der ere førte over Tridser (t). Hver af dem er forsynet med en paa Skivens Plan vinkelret Tverstang j, hvori der efter Længden er skaaret en Spalte k. I denne Spalte gaar Tappen l af en Krumtap m, hvis Axe ligger i Skivens Plan og er vinkelret paa Tandstangen. Har Krumtappens Arm Længden b og danner Vinklen v med Tandstangen, ses denne sidste let at være forskudt Stykket $b\ cos\ v$ ud fra sin Midterstilling; man behøver altsaa kun ved Tandhjul n at forbinde Krumtappens Axer med den Cylinder, hvorom Kurven er viklet, saaledes at v bliver $= x$, $90^0 + x$, $2\ x$, $90^0 + 2\ x$ o. s. v.

Ved den paa Londons Meteorologiske Institut opstillede harmonic analyser er der foruden Integratoren, der giver $\int_0^x \psi(x)\, dx$, 6 Skiver med tilhørende Kugler og Cylindre, der give Kofficienterne til Leddene med $cos\ x$, $sin\ x$, $cos\ 2\ x$, $sin\ 2\ x$, $cos\ 3\ x$ og $sin\ 3\ x$ i Rækkeudviklingen for $\psi\ (x)$. Disse 7 Integratorer, der have Cylinderen med Kurven samt Stangen med Gaflerne fælles, ere anbragte i Række, og deres Kugler, Skiver og Cylindre ere lige store. Imellem Integratorerne Nr. 1 og 2, der give Koefficienterne til $cos\ x$ og $sin\ x$, sidder Cylinderen, hvorom Kurven er viklet, og dens Axe bærer de to paa hinanden vinkelrette Krumtappe, der drive de 2 første Skiver. Imellem Integratorerne Nr. 3 og 4 og imellem Integratorerne Nr. 5 og 6 sidde Axer, der dreje sig Vinkler $2\ x$ og $3\ x$, og bære de andre Krumtappe. Integratoren Nr. 7 giver $\int_0^x \psi\ (x)\, dx$. Da Integralerne skulle tages mellem Grænserne 0 og et Multiplum af $2\ \pi$, maa Cylindren med Kurven paa drejes et helt Antal Omdrejninger, inden de andre Cylindre aflæses. Da dens Omkreds afsat paa Abscisseaxen skal være = Funktionens Periode,

der almindelig er opgivet, er den indrettet saaledes, at dens Diameter kan gives lidt forskjellige Størrelser.

For at prøve Maskinens Nøjagtighed blev den anvendt til af nogle Temperaturkurver at danne et Udtryk for Temperaturen som Funktion af Tiden. Et saadant Udtryk var i Forvejen dannet ved gjentagen omhyggelig Udmaaling af Kurvernes Ordinater og Beregning. Den gjennemsnitlige Forskjel mellem de ved Beregning og ved Maskinen fundne Værdier for Koefficienterne var 0,065°, hvorved maa bemærkes, at Afvigelsen for Cylindren i Integratoren Nr. 2 var 0,150°, medens den for de andre Cylindre tagne sammen kun var 0,047°.

Man har videre for et Tidsrum af c. 8 Maaneder beregnet Middeltemperaturen for hver 5 Dage, dels ved the harmonic analyser, dels ved Amslers Planimeter og dels ved direkte Maaling og Beregning. Idet de 2 først nævnte Resultaters Afvigelser fra det sidste betegnes ved H—B og A—B, giver nedenstaaende Tabel de Antal Gange, disse Afvigelser have havt Værdierne 0,4°, 0,3° o. s. v.

	0,4°	0,3°	0,2°	0,1°	0,0°
$H - B$	0	1	5	22	19
$A - B$	1	7	9	25	5

Foruden at have konstrueret denne Maskine, der danner Rækkeudviklingerne betydelig hurtigere, end Beregnere kunne gjøre det, har W. Thomson gjort opmærksom paa flere Anvendelser af det samme Princip til Integration af Differentialligninger.

Først viser han, hvorledes man vilde kunne integrere Differentialligningen:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{P}\frac{du}{dx}\right) = u \quad (P \text{ en Funktion af } x),$$

der har Anvendelse i Fysiken (f. Ex. ved Bestemmelsen af Varmens Forplantning i Stænger med variabel Ledningsmodstand eller af Vandets Bevægelse i en Kanal med variabelt Tværsnit), og hvortil enhver lineær Differentialligning af 2den Orden kan reduceres. Han tager 2 Integratorer — med Udeladelse af de Cylindre, hvorom

Kurverne vikles — og forbinder dem saaledes, at den Stang, der forskyder Kuglen i Integratoren Nr. 1, selv forskydes proportionalt med Drejningen af Cylinderen i Integratoren Nr. 2 og omvendt, samt at Skiven i Integratoren Nr. 2 drejes Vinklen $\int_0^x P\,dx$ samtidig med, at Skiven i Integratoren Nr. 1 drejes Vinklen x. Kaldes Drejningen af Cylindren samt Forskydningen af Kuglen i de 2 Integratorer χ_1, g_1 og χ_2, g_2, har man altsaa Ligningerne:

$$g_1 = \chi_2,\ g_2 = \chi_1,$$

der i Forbindelse med:

$$g_1 = \frac{d\chi_1}{dx},\ g_2 = \frac{d\chi_2}{Pdx}$$

give:

$$g_1\,dx = d\left(\frac{1}{P}\,\frac{dg_1}{dx}\right) \text{ eller } \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{P}\,\frac{dg_1}{dx}\right) = g_1.$$

$u = g_1$, er altsaa et Integral af Differentialligningen, og da man kan indstille Forbindelserne mellem den ene Integrators Kugle og den andens Cylinder saaledes, at der f. Ex. til $x = o$ svare vilkaarlig valgte Værdier for $g_1 = u$ og $g_2 = \frac{1}{P}\cdot\frac{du}{dx}$, er $u = g_1$ det fuldstændige Integral. Det bemærkes, at man kunde faa u grafisk fremstillet som Funktion af x ved at lade den Stang, der forskyder Kuglen i Integratoren Nr. 1, med en Stift tegne paa en Cylinder, der drejer sig Vinklen x om en med Stangen parallel Axe.

Forbindes i Integratorer — stadig med Udeladelse af de Cylindre, hvorom Kurverne ere viklede — saaledes, at med samme Betegnelser som før:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_i\,(= x).$$
$$g_2 = \chi_1,\ g_3 = \chi_2 \ldots g_i = \chi_{i-1},$$

faar man ved Anvendelse af:

$$g_1 = \frac{d\chi_1}{dx},\ g_2 = \frac{d\chi_2}{dx},\ \ldots\ g_i = \frac{d\chi_i}{dx}$$

Ligningerne:

$$g_1 = \frac{d\chi_1}{dx} = \frac{dg_2}{dx} = \frac{d^2\chi_2}{dx^2} \ldots = \frac{d^i\chi_i}{dx^i}$$

$$g_2 = \frac{d^{i-1}\chi_i}{dx^{i-1}},\quad g_3 = \frac{d^{i-2}\chi_i}{dx^{i-2}} \ldots g_i = \frac{d\chi_i}{dx}.$$

Kan der nu foruden de $3i-2$ allerede existerende Forbindelser mellem Integratorernes $3i$ Stykker tilvejebringes endnu en Forbindelse udtrykt ved:

$$f(x, g_1, g_2, \ldots g_i, \chi_i) = 0,$$

vil $u = \chi_i$ være et Integral af Differentialligningen:

$$f\left(x, \frac{d^i u}{dx^i}, \frac{d^{i-1}u}{dx^{i-1}}, \ldots \frac{du}{dx}, u\right) = 0$$

og kan paa samme Maade som før vises at være dens fuldstændige Integral.

Ogsaa til Integration af sammenhørende Differentialligninger angiver Sir W. Thomson en Methode. Han tager $2i$ dobbelte Integratorer, hver bestaaende af 2 Integratorer — med Udeladelse af Cylindrene, hvorom Kurverne vikles — forbundne saaledes, at Drejningen af Cylindren i Integratoren Nr. 1 er proportional med Forskydningen af Kuglen i Nr. 2. Alle Skiverne dreje sig med samme Hastighed, og vi ville kalde deres fælles Drejningsvinkel t. Betegne

$$x,\ y,\ x',\ y',\ x'',\ y'' \ \ldots\ x^{(i-1)},\ y^{(i-1)}$$

Drejningsvinklerne for Cylindrene i Integratorerne Nr. 2, ville Forskydningerne af Kuglerne i Integratorerne Nr. 1 være:

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2x'}{dt^2},\ \frac{d^2y'}{dt^2} \ldots \frac{d^2x^{(i-1)}}{dt^2},\ \frac{d^2y^{(i-1)}}{dt^2}.$$

Indfører man nu Mekanismer saaledes, at Kuglerne Nr. 1 faa Forskydningerne $X, Y, X', Y' \ldots X^{(i-1)}, Y^{(i-1)}$, der ere Funktioner af $x, y, x', y' \ldots x^{(i-1)}, y^{(i-1)}, t$, ville altsaa Cylindrene i Integratorerne Nr. 2 give Integralerne af Differentialligningerne:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X,\ \frac{d^2y}{dt^2} = Y,\ \frac{d^2x'}{dt^2} = X' \ldots$$

$$\frac{d^2x^{(i-1)}}{dt^2} = X^{(i-1)},\ \frac{d^2y^{(i-1)}}{dt^2} = Y^{(i-1)},$$

Skal dette anvendes f. Ex. paa Bestemmelsen af Bevægelsen af i Punkter i samme Plan med Koordinaterne $x, y, x', y' \ldots$

$x^{(i-1)}$, $y^{(i-1)}$, der tiltrække hverandre med Kræfter, som afhænge af Afstandene, saa man altsaa har:

$$X = (x' - x) f((x' - x)^2 + (y' - y)^2) + (x'' - x) f((x'' - x)^2 + (y'' - y)^2)$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Y = (y' - y) f((x' - x)^2 + (y' - y)^2) + (y'' - y) f((x'' - x)^2 + (y'' - y)^2)$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

o. s. v.

kan man paa følgende Maade sørge for, at Kuglerne Nr. 1 faa de rigtige Forskydninger. Man konstruerer en Flade af Staal med Ligningen:

$$z = \xi f(\xi^2 + \eta^2),$$

hvis retvinklede Koordinatsystem kan forskydes saaledes, at ξ- og η-axen beholde deres Retninger og forblive i en fast vandret Plan. Fladen forbindes med Integratorerne paa en saadan Maade, at en lodret og i lodret Retning forskydelig Stang, der støtter sig paa den, stadig er fremstillet ved Ligningerne:

$$\xi = x' - x, \ \eta = y' - y;$$

Stangens Forskydning vil da være =

$$(x' - x) f((x' - x)^2 + (y' - y)^2).$$

Paa samme Maade bringer man andre Stænger til at faa Forskydninger = de andre Addender i X og kan saa sørge for, at Kuglen Nr. 1 i den første Integrator faar Forskydningen X ved Anvendelse af en Snor, der føres dels over faste Tridser, dels over Tridser fastgjorte paa Stængerne.

Udvidelsen til den samme Opgave for Rummet frembyder ingen theoretisk Vanskelighed.

OMDREJNINGSFLADERS KONFORME FREMSTILLING I PLANEN.

(AF F. BUCHWALDT).

§ 1. En Flade er konformt fremstillet i en Plan, eller projiceret paa en Plan, naar ethvert af Fremstillingens (Projektionens) Fladeelementer er ligedannet med det tilsvarende Fladeelement paa den givne Flade, saa at overalt Vinklen mellem to hinanden skjærende Kurver paa denne Flade vil forblive uforandret i Projektionen. Medens der saaledes i ethvert Punkt er Ligedannethed tilstede mellem Fladen og dens plane Projektion, er der Variation i Maalestoksforholdet, hvorved der forstaas Forholdet mellem et Kurveelement i Projektionen og det tilsvarende Kurveelement paa den givne Flade. Maalestoksforholdet vil i ethvert Punkt af Projektionen være det samme i alle Retninger; men det vil i Almindelighed variere fra Punkt til Punkt, medens det dog i en enkelt Kurve kan forblive konstant. Jo mindre Forskjellen er mellem det største og det mindste Maalestoksforhold, der findes paa det fremstillede Areal, desto nøjagtigere vil dette være fremstillet, ɔ: med desto mindre Fejl vil Projektionens (Kaartets) Maalestok, der tages som Middeltallet af det største og det mindste Maalestoksforhold indenfor det fremstillede Areal, kunne anvendes overalt paa dette.

§ 2. En Omdrejningsflade ville vi fremstille konformt i Planen ved de orthogonale Trajektorier, som dannes af Meridianer og Paralleler, de Kurver, som fremstaa paa Omdrejningsfladen ved dennes Skjæring henholdsvis med Planer (Meridianplaner), der indeholde Omdrejningsaxen, og med Planer (Parallelplaner), der staa lodrette paa denne.

Det Areal, der skal fremstilles, er enten hele Omdrejningsfladen eller en Del deraf, symmetrisk med Hensyn til Midtemeridianen eller Begyndelsesmeridianen.

Ethvert Punkt (α, β) paa Omdrejningsfladen er bestemt ved Koordinaterne α og β, idet α er den Vinkel (mellem $-\pi$ og $+\pi$), som Meridianplanen danner med Midtemeridianens Plan, og β den Vinkel, som Punktets Normal danner med Axens positive Retning; α er Punktets „Længde", og β Komplementet til dets „Polhøjde" eller „Brede".

Fælles for alle Punkter i samme Parallel (β) ere M og P, idet M er Meridianens Krumningsradius og P er Radius i Parallelen (β). Ved „Polen" forstaas det (øverste eller nederste) Punkt (β_p), hvori Meridianen skjærer eller rører Axen, eller, hvis der ikke finder nogen Røring eller Skjæring Sted, det Punkt $(\beta_p = 0)$, hvori Axen skjæres af Planen for den Parallel, der har mindst Radius. Denne Parallel, for hvilken β betegnes ved β_c, kaldes „Polcirklen"; dens Radius P er $= P_c$. I Polcirklens Plan, der indenfor $P = 0$ og $P = P_c$ betragtes som en Del af Fladens Overflade, er P uafhængig af β, der her overalt er $= \beta_p = 0$, og tages derfor til uafhængig Variabel, medens ellers i Reglen udenfor Polcirklen β er den uafhængige Variable. Værdien af β i Polen betegnes altid ved β_p. Naar Meridianen rører Axen, bliver $\beta_p = \beta_c = \mp \frac{\pi}{2}$, og $P_c = P_p$, som altid er $= 0$.

Til Punktet (α, β) eller (α, P) paa Omdrejningsfladen svarer Punktet (x, y) i Projektionen, idet x og y ere retvinklede Koordinater. Disses Begyndelsespunkt (0, 0) svarer til Punktet $(0, \beta_0)$ eller $(0, P_0)$ i Midtemeridianen $(\alpha = 0)$, der i Projektionen fremstilles ved y-Axen. y-Axens og x-Axens positive Retninger vælges saaledes, at $\frac{dy}{d\beta}$ og $\frac{dx}{d\alpha}$ blive positive; naar derfor i Polen Omdrejningsaxen er positiv „opad", vil y-Axen i Polen være positiv „nedad". Projektionen bliver symmetrisk med Hensyn til y-Axen. — Svarer Begyndelsespunktet til Polen, bliver $\beta_0 = \beta_p$ og $P_0 = P_p = 0$; x-Axen vil da forestille Meridianen $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ og — lige som y-Axen — være en Symmetriaxe med Hensyn til Fremstillingen af det orthogonale Næt.

De gjennem Punktet (α, β) paa Omdrejningsfladen gaaende Elementer af en Meridian og en Parallel ville henholdsvis være

$$dm = M \,.\, d\beta \text{ og } dp = P \,.\, d\alpha.$$

De tilsvarende Elementer i Projektionen ville, idet x og y ere Funktioner af α og β, og α er konstant i Meridianen, β konstant i Parallelen, være

$$dm' = d\beta \,.\, \sqrt{\frac{dy^2}{d\beta^2} + \frac{dx^2}{d\beta^2}} \text{ og } dp' = d\alpha \,.\, \sqrt{\frac{dy^2}{d\alpha^2} + \frac{dx^2}{d\alpha^2}}.$$

Da dm' skal staa lodret paa dp', ligesom dm staar lodret paa dp, haves

$$\frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}} = -\frac{\frac{dx}{d\beta}}{\frac{dy}{d\beta}}, \tag{a}$$

saa at man faar

$$\frac{dm'}{dp'} = \frac{\frac{dy}{d\beta} \,.\, d\beta}{\frac{dx}{d\alpha} \,.\, d\alpha};$$

men Konformiteten kræver desuden, at $\frac{dm}{dp} = \frac{dm'}{dp'}$, altsaa at

$$\frac{M}{P} = \frac{\frac{dy}{d\beta}}{\frac{dx}{d\alpha}}. \tag{b}$$

For enhver given Omdrejningsflade ere M og P bekjendte Funktioner af β, saa at ligeledes

$$\gamma = \int \frac{M}{P}\, d\beta + C = \int \frac{dP}{P \cos\beta} + C, \tag{1}$$

vil, naar den arbitrære Konstant C er given, være en fuldstændig bestemt Funktion af β. Man kunde derfor i (a) og (b) indføre γ i Stedet for β, hvorved man, idet $\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{P}{M}$, faar af (b) og derpaa af (a):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= \frac{dy}{d\gamma} \\ \text{og } \frac{dx}{d\gamma} &= -\frac{dy}{d\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Naar heraf x skal kunne bestemmes, maa man have

$$\frac{d^2x}{da\,.\,d\gamma}=\frac{d^2y}{d\gamma^2}=-\frac{d^2y}{da^2}$$

eller

$$\frac{d^2y}{da^2}+\frac{d^2y}{d\gamma^2}=0,$$

som ved Integration giver

$$y=\varphi_1(\gamma+a\sqrt{-1})+\varphi_2(\gamma-a\sqrt{-1}),$$

hvornæst man af (c) faar

$$x=-\sqrt{-1}\,\{\varphi_1(\gamma+a\sqrt{-1})-\varphi_2(\gamma-a\sqrt{-1})\};$$

men, da x skal være $=0$ for $a=0$, maa φ_2 være $=\varphi_1$, saa at y og x bestemmes som Funktioner af a og γ og dermed, ifølge (1), tillige som Funktioner af a og β ved

$$\left.\begin{aligned} y&=\varphi(\gamma+a\sqrt{-1})+\varphi(\gamma-a\sqrt{-1})\\ x&=-\sqrt{-1}\,\{\varphi(\gamma+a\sqrt{-1})-\varphi(\gamma-a\sqrt{-1})\}\end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Kvadratet af Maalestoksforholdet $\mu\,(a,\beta)$ i Punktet (x, y), svarende til Punktet (a,β), erholdes af

$$\mu^2(a,\beta)=\left(\frac{dm'}{dm}\right)^2=\left(\frac{dp'}{dp}\right)^2=\frac{\left(\frac{dy}{d\gamma}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\gamma}\right)^2}{P^2}=\frac{\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dx}{da}\right)^2}{P^2},$$

som giver

$$\mu^2(a,\beta)=\frac{4}{P^2}\,.\,\varphi'(\gamma+a\sqrt{-1})\,.\,\varphi'(\gamma-a\sqrt{-1}). \qquad (3)$$

Sættes

$$\varphi(v)=\psi(e^v)=\psi(u),\ \text{altsaa}\ \varphi'(v)=u\,.\,\psi'(u),$$

faas, i Stedet for (2) og (3),

$$\left.\begin{aligned} y&=\psi(e^\gamma[\cos a+\sqrt{-1}\,.\sin a])+\psi(e^\gamma[\cos a-\sqrt{-1}\,.\sin a])\\ x&=-\sqrt{-1}\,\{\psi(e^\gamma[\cos a+\sqrt{-1}\,.\sin a])-\psi(e^\gamma[\cos a-\sqrt{-1}\,.\sin a])\}\end{aligned}\right\}(2)'$$

og

$$\left.\begin{aligned} &\mu^2(a,\beta)=\\ &\frac{4e^{2\gamma}}{P^2}\,.\,\psi'(e^\gamma[\cos a+\sqrt{-1}\,.\sin a])\,.\,\psi'(e^\gamma[\cos a-\sqrt{-1}\,.\sin a])\end{aligned}\right\}(3)'$$

I Formlerne (2) og (2)' maa altsaa ifølge (1) γ og i (3) og (3)' desuden P indføres som de, ved den givne Flade bestemte, bekjendte Funktioner af β.

Betingelsen for, at en Omdrejningsflade kan fremstilles konformt efter en bestemt Lov (φ eller ψ), vil nu alene være den, at Integrationen i (1) kan udføres.

Minimum af Maalestoksforholdet skal findes i Midtemeridianen ($\alpha = 0$). Da man af (3) og (3)', i Forbindelse med (1), faar

$$\frac{d \,.\, \mu\,(0, \beta)}{d\beta} = \frac{2M}{P^2}\left[\varphi''\,(\gamma) - \varphi'\,(\gamma)\,.\,\cos\beta\right] \tag{4}$$

og

$$\frac{d \,.\, \mu\,(0, \beta)}{d\beta} = \frac{2M \,.\, e^{\gamma}}{P^2}\left[e^{\gamma}\,.\,\psi''\,(e^{\gamma}) + \psi'\,(e^{\gamma}) - \psi'\,(e^{\gamma})\,.\,\cos\beta\right], \tag{4)'$$

saa maa β for det Punkt $(0, \beta)$ i Midtemeridianen, i hvilket Maalestoksforholdet er et Minimum, gjøre højre Side af (4) eller (4)' til Nul.

Den arbitrære Konstant C i (1) for γ kan man, naar Meridianen skjærer eller rører $\left(P_c = P_p = 0,\ \beta_p = \beta_c = \mp \frac{\pi}{2}\right)$ Axen og iøvrigt er en kontinuerlig Kurve, give en hvilken som helst Værdi, f. Ex. Nul, fordi man i (2) eller (2)' kan i Stedet for $\varphi(v)$ eller $\psi(u)$ sætte $\varphi(C + v)$ eller $\psi(K.u)$, hvor C og K ere arbitrære.

Da P i Polen (β_p) altid er $= 0$, ɔ: $P_p = 0$, maa, ifølge (1), $\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)_p$ og $\left(\frac{d\gamma}{dP}\right)_p$ altid — med mindre M_p ogsaa skulde være $= 0$ — være uendelige; men det vil let ses, at e^{γ} i Polen, eller e^{γ_p}, ligeledes maa være Nul, og at man i Polen, naar Meridianen skjærer Axen, maa have

$$\left(\frac{e^{k\gamma}}{P}\right)_p = \frac{e^{k\gamma_p}}{P_p} = \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \text{for} & k & > & \cos\beta_p \\ K > 0 & - & k & = & \cos\beta_p \\ \infty & - & k & < & \cos\beta_p \end{array}\right\} \tag{1)'$$

og, naar Meridianen rører Axen $\left(\beta_p = \beta_c = -\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\left(\frac{e^{k\gamma}}{P}\right)_p = \frac{e^{k\gamma_p}}{P_p} = \left\{\begin{array}{cccc} 0 & \text{for} & k > 0 = \cos\beta_p \\ \infty & - & k \leqq 0 = \cos\beta_p \end{array}\right\}. \tag{1)''$$

Naar Meridianen derimod ikke er kontinuerlig, men bestaar af forskjellige hinanden skjærende Stykker af kontinuerlige Kurver,

maa i Sammenstødspunktet mellem to saadanne Kurver γ erholde den samme Værdi, hvad enten den beregnes paa den ene eller den anden af de to Kurver.

Dette finder Sted ved en Meridiankurve, som ikke skjærer Axen, altsaa $P_c > 0$, idet Polcirklens Plan indenfor Parallelen $\left(\beta_c = \mp \frac{\pi}{2}\right)$ skal betragtes som en Del af Fladens Overflade. Vi vælge da, at bestemme γ udenfor Polcirklen, altsaa paa den ikke plane Overflade, saaledes

$$\gamma = lg\, P_c + \int_{\beta_c}^{\beta} \frac{M}{P} d\beta, \qquad (1)'''$$

hvorved man i Planen indenfor Polcirklen, hvor $cos\, \beta$ er konstant $= cos\, \beta_p = 1$, faar af den 2den Formel (1)

$$e^{\gamma} = P.$$

altsaa $e^{\gamma_p} = P_p = 0$ og $e^{\gamma_c} = P_c$ (Polcirklens Radius).

§ 3. Vi ville beregne γ ved et Par af de vigtigste Omdrejningsflader, for hvilke man anmodes om selv at tegne en Figur.

a. **Toren** faar her sin største Betydning derved, at man altid imellem to tilstrækkelig nær ved hinanden beliggende Paralleler kan remplacere den givne Omdrejningsflade med en Tore, som oskulerer i Midteparallelen, idet dennes Krumningsradius M tages til Radius for Torens Meridiancirkel.

Vi betegne Meridianens Radius ved a, dens Centrums Afstand fra Axen ved b. Man har da $M = a$ og $P = b + a\, sin\, \beta$.

1. Naar Meridianen skjærer Axen, sættes

$$b = a\, sin\, r.$$

idet r er den Vinkel, som i Meridianens nederste Skjæringspunkt med Axen — det øverste Skjæringspunkt er „Polen" — dannes mellem denne og Skjæringspunktets Diameter. Man har da $\beta_p = -r$, og ifølge (1) for $C = 0$.

$$\gamma = \int \frac{d\beta}{\sin v + \sin \beta} = lg \left[\frac{\sin v + \sin \beta}{1 + \sin v \, . \, \sin \beta + \cos v \, . \, \cos \beta} \right]^{\frac{1}{\cos v}},$$

som omformes til

$$e^{\gamma} = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} (\beta + v)}{\cos \frac{1}{2} (\beta - v)} \right)^{\frac{1}{\cos v}}. \qquad (1)_a$$

Det kan heraf udledes, at en af Torens konforme Projektioner er Udfoldningen af en perspektivisk Projektion, fremstaaet ved, at Øjepunktet tages i Fladens nederste Skjæringspunkt ($\beta = -(\pi - v)$) med Axen, og at Fladens Punkter derfra projiceres paa en Kegleflade, der har samme Axe og Toppunktsvinkel som, eller er sammenfaldende med, en omskreven Kegle, som rører Fladen i Parallelen ($\beta = v$), hvis Plan gaar igjennem Fladens øverste Skjæringspunkt (Polen, $\beta_p = -v$) med Axen, og hvis Radius er $= 2a \sin v$. Keglens halve Toppunktsvinkel er $= \frac{\pi}{2} + v$.

I samme Meridian vil Vinklen mellem Normalerne til Røringspunktet ($\beta = v$) med den omskrevne Kegles Frembringer og til Punktet (β) være $= \beta - v$. De to Punkter ses altsaa under Vinklen $\frac{1}{2} (\beta - v)$. Paa samme Maade findes, at Polen ($\beta_p = -v$) og Punktet (β) ses under Vinklen $\frac{1}{2} (\beta + v)$, idet Vinklen mellem de to Punkters Normaler er $(\beta - \beta_p) = \beta + v$. Heraf erholdes let, at Afstanden ϱ paa den omskrevne Kegle fra dennes Toppunkt til Projektionen af Punktet (β) bliver

$$\varrho = \frac{2\,a}{\cos v} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta + v)}{\cos \frac{1}{2} (\beta - v)},$$

idet Afstanden fra Keglens Toppunkt til Røringspunktet ($\beta = v$) er $\varrho_v = 2\,a \, . \, tg\, v$. Naar Keglen udfoldes paa Tangentplanen til Midtemeridianen ($\alpha = 0$), vil Vinklen ϑ i Projektionen mellem de to gjennem Polen gaaende rette Linier, som forestille Midtemeridianen og Meridianen (α), være bestemt ved

$$a \,.\, 2a \sin v = \vartheta \,.\, \varrho_v,$$

eller

$$\vartheta = a \,.\, \cos v.$$

Forskydes Keglen et vilkaarligt Stykke i Retning af Axen, faas i Almindelighed

$$\varrho = K \,.\, \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta + \nu)}{\cos \frac{1}{2}(\beta - \nu)},$$

hvorimod ϑ forbliver uforandret.

Naar man nu i Projektionen (den udfoldede Kegleflade) tager Polen til Begyndelsespunkt for Koordinaterne x og y, haves $y = \varrho \,.\, \cos \vartheta$ og $x = \varrho \sin \vartheta$, eller

$$\left.\begin{aligned} y &= K \,.\, \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta + \nu)}{\cos \frac{1}{2}(\beta - \nu)} \,.\, \cos (a \,.\, \cos v) \\ \text{og} \qquad x &= K \,.\, \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta + \nu)}{\cos \frac{1}{2}(\beta - \nu)} \,.\, \sin (a \,.\, \cos v); \end{aligned}\right\}$$

men det samme Resultat erholdes ved med den i $(1)_a$ erholdte Værdi for e^γ, i $(2)'$ at sætte

$$\psi(u) = \frac{1}{2} K \,.\, u^{\cos v},$$

hvilken Funktionsform altsaa giver den nævnte perspektiviske Projektion, og, skal denne svare til en Toren i Parallelen $(\beta = \nu)$ rørende Kegle, maa K tages $= \frac{2a}{\cos v}$. Den til Begyndelsespunktet svarende Værdi β_0 af β er da β_p for Polen, eller $\beta_0 = \beta_p = -v$.

Maalestoksforholdet bliver ifølge $(3)'$

$$\mu(\beta) = \frac{K}{2a} \frac{\cos v}{\cos^2 \frac{1}{2}(\beta - v)}, \tag{d}$$

hvis Minimum $\mu(v) = \frac{K}{2a} \cos v$, eller for den rørende Kegle $\mu(v) = 1$, ikkun kan findes i Røringsparallelen $(\beta = v)$, saa at Projektionens Nøjagtighed vil afhænge af, hvorledes denne Parallel er beliggende med Hensyn til det Areal, der skal fremstilles. Havde man derimod taget $\psi(u) = \frac{1}{2} K \,.\, u^k$, hvorved Projektionen for $k \gtrless \cos v$ vilde ophøre at være perspektivisk, vilde man have kunnet disponere over k saaledes, at der erholdtes den for den givne Funktionsform størst mulige Nøjagtighed, eller mindst mulige Variation i Maalestoksforholdet.

2. Naar Meridianen rører Axen, haves $b = a$,

$$\beta_p = \beta_c = -\frac{\pi}{2},\quad P_c = P_p = 0,$$

$$\gamma = \int \frac{d\beta}{1 + \sin\beta} = -\frac{2}{1 + tg\,\frac{1}{2}\beta}, \qquad (1)_{a_2}$$

som giver $e^{\gamma_c} = e^{\gamma_p} = P_c = 0$.

3. Naar Meridianen ikke skjærer Axen, er $b > a$, Polcirklens Radius $P_c = b - a$, $\beta_c = -\frac{\pi}{2}$, $\beta_p = 0$. Indenfor Polcirklen er

$$e^\gamma = P$$

og varierer fra $e^{\gamma_p} = P_p = 0$ til $e^{\gamma_c} = P_c = b - a$.

Udenfor Polcirklen faas af (1)'''

$$\gamma = lg\,(b - a) + \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}\left[\pi - arc\left(\cos = \frac{a + b\sin\beta}{b + a\sin\beta}\right)\right]. \qquad (1)_{a_3}$$

b. **Sfæroiden,** hvis Meridian er en Ellipse, der har sin lille Axe sammenfaldende med Omdrejningsaxen.

Naar Ellipsens halve Storaxe er $= a$, og dens Excentricitet $= \varepsilon$, og man indfører Hjælpevinklen ω, bestemt ved

$$\varepsilon \cos\beta = \sin\omega,$$

haves $\beta_p = 0$,

$$M = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2\cos^2\beta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\cos^3\omega} \text{ og } P = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\beta}} = \frac{a\sin\beta}{\cos\omega},$$

altsaa

$$\gamma = (1 - \varepsilon^2)\int \frac{d\beta}{(1 - \varepsilon^2\cos^2\beta)\,.\,\sin\beta},$$

eller

$$\left.\begin{aligned} e^\gamma &= tg\,\frac{1}{2}\beta\,.\left(\frac{1 + \varepsilon\cos\beta}{1 - \varepsilon\cos\beta}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}, \\ \text{eller } e^\gamma &= tg\,\frac{1}{2}\beta\,.\,tg^\varepsilon\left(45^0 + \frac{1}{2}\omega\right), \\ \text{idet } \omega &= arc\,(\sin = \varepsilon\,.\,\cos\beta). \end{aligned}\right\} \qquad (1)_b$$

Sfæroiden har ikke nogen konform perspektivisk Projektion; men den kan — ligesom i Almindelighed enhver Omdrejningsflade — først overføres konformt paa en Kugle (jvfr. § 5) og derefter,

idet Kuglen er en Tore (a . 1) med $v = 0$, projiceres perspektivisk og konformt paa en Plan.

c. **Kuglen** er en Tore (a . 1) med $v = 0$ eller en Sfæroide (b) med $\varepsilon = 0$ (altsaa $\omega = 0$), og saavel $(1)_a$ som $(1)_b$ give derfor

$$e^{\gamma} = tg \frac{1}{2} \beta. \qquad (1)_c$$

Den under Toren omtalte Kegle, paa hvilken Fladen kan projiceres perspektivisk og konformt, bliver her til en Plan, der er parallel med eller sammenfaldende med Tangentplanen til Polen ($\beta = 0$), medens Øjepunktet kommer til at falde i Endepunktet ($\beta = \pm \pi$) af den paa Tangentplanen lodrette Diameter. Maalestoksforholdets Minimum $\mu(0) = \frac{K}{2a}$, eller for $K = 2a$ (ɔ: Projektionsplanen sammenfaldende med Tangentplanen) $\mu(0) = 1$, kan imidlertid her bringes til at falde indenfor det Areal, der skal fremstilles, og navnlig til at falde i dettes Midtpunkt, hvorved Maalestoksforholdet ved den givne Funktionsform, $\psi(u) = \frac{1}{2} K . u$, erholder den mindst mulige Variation, idet ethvert Punkt paa Kuglen kan betragtes som Pol for et Hjælpesystem af Meridianer og Paralleler, hvis sfæriske Koordinater α^* og β^* beregnes af de oprindelige α og β og indtræde i Formlerne i Stedet for disse. Tages Begyndelsespunktet ($\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$) i Hjælpepolen ($\beta^* = 0$), bliver

$$\left.\begin{aligned} y &= K . tg \frac{1}{2} \beta^* . \cos \alpha^*, \\ x &= K . tg \frac{1}{2} \beta^* . \sin \alpha^*, \\ \text{og } \mu(\beta^*) &= \frac{K}{2a} . \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta^*} = \frac{\mu(0)}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta^*} \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

Projektionen, der er bekjendt under Navnet „den stereografiske Projektion“, har den mærkelige Egenskab, at Projektionen af enhver Cirkel paa Kuglens Overflade er en Cirkel.

§ 4. **Valget af Formen for og den nærmere Bestemmelse af den arbitrære Funktion**, φ i (2) eller ψ i (2'), afhænge fornemmelig af, om der især skal tilstræbes

Simpelhed og Lethed i Beregning og Konstruktion, eller om der fortrinsvis skal lægges Vægt paa Nøjagtigheden, saaledes at en Middelmaalestok m kan over hele det fremstillede Areal benyttes med den mindst mulige Fejl.

Vi ville i denne § betragte de simpleste Former og Bestemmelser for φ og ψ.

a. Den konforme cylindriske Projektion. Naar man i (2) og (3) sætter

$$\varphi(v) = \frac{1}{2}(C_0 + C_1 v),$$

faas

$$\left.\begin{aligned} y &= C_0 + C_1 \cdot \gamma, \\ x &= C_1\, a \\ \mu(\beta) &= \frac{C_1}{P} \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

og

Parallelerne (β konstant, eller γ konstant) ere altsaa rette Linier parallele med x-Axen, og Meridianerne (a konst.) rette Linier parallele med y-Axen. Enhver ret Linie i Projektionen vil svare til en Linie (den loxodromiske) paa Fladen, der overskjærer alle Meridianerne under en konstant Vinkel, den samme som i Projektionen. Det samme gjælder med Hensyn til Liniens Skjæring med Parallelerne.

Maalestoksforholdet varierer stærkest i Retning af Meridianerne og er konstant i den samme Parallel; det er omvendt proportionalt med Parallelens Radius P, har sine absolute Minima i Parallelerne $\left(\beta = \pm \frac{\pi}{2}\right)$ og bliver uendeligt i Polerne ($P = P_p = 0$).

Da Maalestoksforholdets Minimum er bundet til bestemte Paralleler $\left(\beta = \pm \frac{\pi}{2}\right)$ paa Fladen, vil det være tilfældigt, om det falder indenfor det Areal, der skal fremstilles, og navnlig, om det falder i dettes Midteparallel; men paa Kuglen kunne dog de gunstigste Maalestoksforhold for dette Areal bringes til Veje derved, at man tager en Hjælpepol med tilhørende Begyndelsesmeridian og sfæriske Koordinater a^* og β^* (der beregnes af de oprindelige a og β), saaledes beliggende, at Arealet falder indenfor 2 Paralleler

(β_n^*) og $(\beta_s^* = \pi - \beta_n^*)$, hvis fælles Afstand $\frac{\pi}{2} - \beta_n^*$ fra Hjælpeækvatoren $\beta^* = \frac{\pi}{2}$, der tilnærmelsesvis kommer til at gjennemskjære Arealet efter dettes største Udstrækning, bliver saa lille som muligt. Idet nu Begyndelsespunktet tages i Hjælpeækvatoren (altsaa β_0 svarende til $\beta_0^* = \frac{\pi}{2}$), faas, naar Kuglens Radius er R,

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 \gamma^* = C_1 \, lg. \, tg \frac{1}{2} \beta^*, \\ x &= C_1 \alpha^*, \\ \mu(\beta^*) &= \frac{C_1}{R \, . \, sin \, \beta^*} = \frac{\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{sin \, \beta^*} = \frac{\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta^*\right)}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(f)}'$$

idet $\frac{\pi}{2} - \beta^*$ er Punktets sfæriske Afstand fra, eller Brede med Hensyn til, Hjælpeækvatoren (x-Axen), og $\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{C_1}{R}$ er Maalestoksforholdets Minimum, medens $\mu(\beta_n^*) = \mu(\beta_s^*) = \frac{\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{sin \, \beta_n^*}$ er dets Maximum indenfor Arealet. Skal nu Projektionens Maalestok, eller Middelmaalestoksforholdet, være m, erholdes til Bestemmelsen af C_1

$$2m = \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mu(\beta_n^*) = \frac{C_1}{R}\left(1 + \frac{1}{sin \, \beta_n^*}\right).$$

Jo mindre Arealets Udstrækning, $2\left(\frac{\pi}{2} - \beta_n^*\right)$, i Brederetningen er i Forhold til dets Udstrækning (Max. af $2\alpha^*$) i Længderetningen, desto fordelagtigere vil Projektionen være.

b. Sættes i (2) og (3)

$$\varphi(v) = \frac{1}{2}(C_0 + C_1 v + C_2 v^2),$$

faas Meridianer og Paralleler fremstillede ved to Systemer af Parabler, der have fælles Axe (Midtemeridianen), men hvis Konvexiteter vende i modsat Retning.

c. Den konforme koniske Projektion. Sætter man

$$\psi(u) = \frac{1}{2}(K_0 + K_1 u^k),$$

faas af (2)':

$$\left.\begin{array}{l} y = K_0 + K_1 \,.\, e^{k.\gamma} \,.\, cos\,(ka), \\ x = K_1 \,.\, e^{k.\gamma} \,.\, sin\,(ka), \end{array}\right\} \quad \text{(g)}$$

og

hvori man, idet γ_0 svarer til β_0 for Begyndelsespunktet, maa have $K_0 = - K_1 e^{k\gamma_0}$. Formlen (3)' giver:

$$\mu(\beta) = K_1 k \,.\, \frac{e^{k\gamma}}{P}. \quad \text{(h)}$$

Parallelerne ere altsaa koncentriske Cirkler, beskrevne hver især med en Radius

$$\varrho = K_1 \,.\, e^{k\gamma}$$

omkring Polens Projektion, hvorfra Meridianerne udgaa som rette Linier, saaledes at den til a svarende Meridian danner med Midtemeridianen (y-Axen) en Vinkel

$$\vartheta = ka.$$

Maalestoksforholdet er — ligesom i Tilfældet a (den konforme cylindriske Projektion) — konstant i den samme Parallel og varierer stærkest i Retning af Meridianerne; men dets Minimum er ikke bundet til bestemte Paralleler paa Fladen, saa at man kan disponere saaledes over Konstanterne K_1 og k, at Variationen i Maalestoksforholdet bliver indenfor det Areal, der skal fremstilles, saa lille, som den valgte Funktionsform for ψ overhovedet tillader.

Naar Arealet er indesluttet imellem Parallelerne, svarende til $\beta = \beta_n$ og $\beta = \beta_s$, kan man nemlig gjøre Maalestoksforholdene i disse 2 Grænseparalleler til 2 indbyrdes lige store Maxima for det mellemliggende Areal ved at sætte $\mu(\beta_n) = \mu(\beta_s)$, som giver

$$k = \frac{1}{\gamma_s - \gamma_n} \,.\, lg\,\frac{P_s}{P_n}. \quad \text{(i)}$$

Maalestoksforholdets Minimum maa nu falde i en mellemliggende Parallel, hvis Værdi for β vi ville betegne ved β_0, saa at altsaa det mindste Maalestoksforhold skal findes i Begyndelsespunktet og i den igjennem dette Punkt gaaende, x-Axen

rørende, Parallel. Betingelsen herfor er, ifølge den 1ste Formel (4)', at

$$k = \cos \beta_0 \tag{j}$$

Naar saaledes k og β_0 ere blevne bestemte ved (i) og (j), findes slutteligen K_1 af Betingelsen

$$2m = \mu(\beta_0) + \mu(\beta_n) = \mu(\beta_0) + \mu(\beta_s),$$

eller af

$$2m = K_1 \,.\, k \left[\frac{e^{k\gamma_0}}{P_0} + \frac{e^{k\gamma_n}}{P_n}\right], \tag{k}$$

idet m er den for Projektionen forlangte Maalestok. Naar $k = \cos \beta_0$ er $< \cos \beta_p$, bliver, ifølge (1)' og (1)'' i § 2, i Polen $\mu(\beta_p) = \infty$.

En simplere, men mindre fordelagtig Bestemmelse af K_1 og k erholdes ved at se bort fra Betingelsen (i), og betragte β_0 som given — man kunde f. Ex. sætte $\beta_0 = \frac{1}{2}(\beta_n + \beta_s)$ —, derpaa bestemme k af (j) og endelig K_1 af (k), hvori dog β_n maatte ombyttes med β_s, hvis $\mu(\beta_s)$ bliver $> \mu(\beta_n)$.

Den konforme koniske Projektion vil i Reglen blive desto nøjagtigere, jo mindre Arealets største Brededifferens $(\beta_s - \beta_n)$ er i Forhold til dets største Længdedifferens.

Projektionen gaar for $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, altsaa $k = 0$, over til den foran, under a, omtalte konforme cylindriske Projektion. Er $\beta_0 = \beta_p$, Værdien af β i Polen, bliver Projektionen ved Toren $(\beta_p = -r)$ og ved Kuglen $(\beta_p = 0)$ perspektivisk (jvfr. § 3).

Sidstnævnte Projektion ved Kuglen, eller den stereografiske Projektion, kan dog — som i § 3 c anført —, selv om β_0 for Begyndelsespunktet ikke er $= 0$, ogsaa anvendes saaledes, at dette Punkt bliver Projektionens Midtpunkt, ɔ: det Punkt, i hvilket Maalestoksforholdet er mindst, idet man kan tage det til Hjælpepol for et System af Koordinater α^* og β^*, der kunne beregnes af de oprindelige α og β; men, hvis den til Hjælpepolen $(\beta_0, \beta^* = 0)$ valgte Begyndelsesmeridian for α^*, gaar igjennem den oprindelige Pol $(\beta_p = 0)$, saa kan man undgaa at indføre de nye Koordinater

α^* og β^*. Man maa da nemlig i y-Axen (Begyndelsesmeridianen, ($\alpha^* = 0$, $\alpha = 0$) have

$$\beta^* = \beta - \beta_0,$$

og altsaa, ifølge (e) i § 3 c og (2)',

$$y = K \cdot tg \frac{1}{2} \beta^* = K \cdot tg \frac{1}{2} (\beta - \beta_0) = K \frac{tg \frac{1}{2} \beta - tg \frac{1}{2} \beta_0}{1 + tg \frac{1}{2} \beta_0 \cdot tg \frac{1}{2} \beta} = 2 \cdot \psi \left(tg \frac{1}{2} \beta \right),$$

eller

$$\psi(u) = \frac{1}{2} K \frac{u - tg \frac{1}{2} \beta_0}{1 + tg \frac{1}{2} \beta_0 \cdot u},$$

som indføres i (2)' og (3)' med $u = tg \frac{1}{2} \beta \, (\cos \alpha \pm \sqrt{-1} \, . \, \sin \alpha)$.

Maalestoksforholdet bliver i alle Retninger (α^*) for ethvert Punkt, hvis Afstand fra Begyndelsespunktet ($\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$, eller $\beta^* = 0$) er β^*, det i (e) angivne.

d. Maalestoksforholdet konstant i Midtemeridianen. Naar Arealets største Brededifferens er $(\beta_s - \beta_n)$, dets største Længdedifferens $= 2\,\alpha_1$, vil der — som foran, under c, anført — i Reglen være desto større Fordel forbunden med den konforme koniske Projektion, ved hvilken Maalestoksforholdet forbliver konstant i Parallelerne, medens dets største Variation kastes over i Brederetningen, jo mindre $(\beta_s - \beta_n)$ er i Forhold til α_1. Hvis omvendt $(\beta_s - \beta_n)$ er stor i Sammenligning med $2\alpha_1$, bliver Projektionen mindre fordelagtig, og der maa da kunne opnaas en større Nøjagtighed ved at lade Maalestoksforholdet forblive konstant i Midtemeridianen ($\alpha = 0$), saa at Funktionen ψ, ifølge (3)', maa bestemmes af

$$\mu(0, \beta) = \frac{2 e^\gamma}{P} \cdot \psi'(e^\gamma) = k \text{ (konstant).}$$

Naar heraf $\psi(u)$ skulde kunne bestemmes, maatte man først kunne, ifølge (1), udtrykke β og dermed P ved γ eller e^γ. Dette kan saaledes ske saavel ved Toren som ved Kuglen. Ved Kuglen lader Bestemmelsen af $\psi(u)$ sig let udføre, og for andre Omdrejningsflader, ved hvilke Opløsningen af Ligningen (1) med Hensyn til β ikke skulde kunne udføres, vil man mulig kunne hjælpe sig

med en Tilnærmelse, idet man — saaledes som det i den følgende § 5 vil blive vist — først kan overføre den givne Omdrejningsflade konformt paa en Kugle. Er Kuglens Radius $= a$, faas

$$P = a \cdot \sin\beta = 2a \frac{tg\,\frac{1}{2}\beta}{1 + tg^2\,\frac{1}{2}\beta} = 2a \frac{e^\gamma}{1 + e^{2\gamma}},$$

altsaa

$$\psi'(e^\gamma) = \frac{ak}{1 + e^{2\gamma}},$$

som ved Integration giver

$$\psi(u) = \frac{1}{2} C + ak \cdot arc\,(tg = u).$$

Ved Indsættelsen heraf i (2)' faas efter nogen Omformning, og idet C bestemmes derved, at y skal være $= 0$, for $a = 0$ og $\beta = \beta_0$,

$$\left.\begin{aligned} y &= ak \cdot (arc\,(tg = tg\,\beta \cdot \cos a) - \beta_0), \\ x &= ak \cdot lg \sqrt{\frac{1 + \sin\beta \cdot \sin a}{1 - \sin\beta \cdot \sin a}}, \end{aligned}\right\} \qquad (l)$$

medens (3)' giver

$$\mu\,(a, \beta) = \frac{k}{\sqrt{1 - 4\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^6\frac{1}{2}\beta} \cdot \sin^2 a}}, \qquad (m)$$

hvoraf endelig k kan bestemmes ved

$$2m = \mu(0,\beta) + \mu(a_1,\beta_s) = k\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 4\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta_s}{\cos^6\frac{1}{2}\beta_s} \cdot \sin^2 a_1}}\right), \qquad (n)$$

idet m er den Maalestok, der med mindst Fejl skal kunne anvendes over hele det fremstillede Areal.

§ 5. Den konforme Overførelse af Omdrejningsflader paa en Kugle.

Naar man paa en given Omdrejningsflade ønsker at anvende en konform Projektion med visse bestemte Egenskaber, og den ved disse betingede Form for φ i (3) eller ψ i (3)' vanskelig lader sig bestemme, hvorimod den søgte Funktionsform let vilde kunne findes, hvis Fladen var en Kugle, saa kan man, hvis Meridianens Konkavitet er vendt mod Axen, først overføre Fladen konformt paa en Kugle og derefter fremstille denne konformt i Planen, idet

da den saaledes erholdte endelige Fremstilling ogsaa vil være konform med den givne Flade, hvorimod den rigtignok kun tilnærmelsesvis vil kunne erholde de øvrige oprindelig forlangte Egenskaber.

Betegnes det ved Overførelsen paa Kuglen erholdte Maalestoksforhold med μ_1 og det ved Overførelsen fra Kuglen til Planen erholdte Maalestoksforhold ved μ_2, vil det endelige Maalestoksforhold, det, der angiver Forholdet mellem et Kurveelement i Planen og det tilsvarende paa Fladen, være

$$\mu = \mu_1 \, . \, \mu_2. \tag{5}$$

Jo mere μ_1 nærmer sig til at være $= 1$, desto mere vil det imellem Parallelerne β_n og β_s beliggende Areal af Fladen nærme sig til at falde sammen med Kuglefladen, og med desto større Tilnærmelse vil dets endelige Projektion i Planen have de oprindelig forlangte Egenskaber.

Naar Maalestoksforholdets Minimum skal findes i Begyndelsespunktet ($x = 0$, $y = 0$), svarende til Punktet (0, β_0) paa Fladen, beliggende mellem Grænseparallelerne β_n og β_s, saa tænke vi os Fladen omskreven med en Kugle, som rører i Parallelen (β_0), og hvis Radius altsaa er $= \dfrac{P_0}{sin\,\beta_0}$. Ethvert Punkt ($\alpha$, β) paa Fladen projiceres nu i et Punkt (α, β') paa Kuglen saaledes, at det forbliver i sin Meridianplan, ɔ: $\alpha' = \alpha$, at $\beta'_0 = \beta_0$, og at

$$\frac{M \, . \, d\beta}{P \, . \, d\alpha} = \frac{\dfrac{P_0}{sin\,\beta_0} \, . \, d\beta'}{\dfrac{P_0}{sin\,\beta_0} \, . \, sin\,\beta' \, . \, d\alpha},$$

hvoraf, ifølge (1) erholdes

$$tg\,\frac{1}{2}\,\beta' = tg\,\frac{1}{2}\,\beta_0 \, . \, e^{\gamma - \gamma_0}. \tag{6}$$

Maalestoksforholdet er μ_1 (α, β') eller

$$\mu_1\,(\alpha, \beta) = \frac{P_0 \, . \, sin\,\beta'}{P \, . \, sin\,\beta_0} = \mu_1\,(\beta), \tag{7}$$

hvori β' kunde indføres som Funktion af β eller γ, ifølge (6). Af (6) faas $\beta'_0 = \beta_0$, og af (7)

$$\mu_1\,(\beta'_0) = \mu_1\,(\beta_0) = 1.$$

En større Tilnærmelse til Kuglen kunde have været erholdt ved at benytte en Kugle med en anden Radius R, idet man i Stedet for (6) satte $tg\,\frac{1}{2}\,\beta' = C\,.\,e^{\gamma}$, derpaa bestemte C af $\mu_1\,(\beta_n) = \mu_1\,(\beta_s)$, eller af $\frac{\sin\beta'_n}{P_n} = \frac{\sin\beta'_s}{P_s}$, og endelig R af $2 = \mu_1\,(\beta'_0) + \mu_1\,(\beta_n)$; men β'_0 maatte da først bestemmes af $\left(\frac{d\mu_1\,(\beta')}{d\beta}\right)_0 = 0$, der imidlertid vilde give en anden Værdi for β'_0 end β_0, som er den Værdi af β, der skulde gjøre $\mu\,(0, \beta_0) = \mu_1\,(0, \beta_0)\,.\,\mu_2\,(0, \beta_0)$ til et Minimum. — En endnu større Tilnærmelse til Kuglen kunde man endelig have erholdt ved i Stedet for $a' = a$ at sætte $a' = k\,.\,a$.

§ 6. Projektioner, ved hvilke der, idet der tages Hensyn til Arealets Udstrækning i forskjellige Retninger, tilstræbes den størst mulige Nøjagtighed, den mindst mulige Forskjel i Maalestoksforholdet indenfor Arealets Begrænsning.

Sættes i (2)' og (3)'

$$\psi\,(u) = \frac{1}{2}\,K_0 + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=\infty} K_r\,u^{k_r},$$

saa erholdes, idet $a = 0$ og $\beta = \beta_0$ skulle give $y = 0$ og $x = 0$,

$$\left.\begin{aligned} y + \sum_{r=1}^{r=\infty} K_r\,e^{k_r\gamma_0} &= \sum_{r=1}^{r=\infty} K_r\,e^{k_r\gamma}\,.\,\cos\,(k_r\,a) \\ \text{og } x &= \sum_{r=1}^{r=\infty} K_r\,e^{k_r\gamma}\,.\,\sin\,(k_r\,a) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

samt

$$\left.\begin{aligned} \mu^2\,(a, \beta) = \frac{1}{P^2}\Bigg\{&\left(\sum_{r=1}^{r=\infty} K_r\,k_r\,e^{k_r\gamma}\right)^2 \\ &- 4\Bigg(K_1\,k_1\sum_{r=2}^{r=\infty} K_r\,k_r\,e^{(k_r+k_1)\gamma}\,\sin^2\frac{1}{2}\,[(k_r - k_1)\,a] \\ &+ K_2\,k_2\sum_{r=3}^{r=\infty} K_r\,k_r\,e^{(k_r+k_2)\gamma}\,\sin^2\frac{1}{2}\,[(k_r - k_2)\,a] + \ldots\Bigg)\Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Man bør have

$$\mu\,(a, \beta) > \mu\,(0, \beta) = \frac{1}{P}\sum_{r=1}^{r=\infty} K_r\,k_r\,e^{k_r\gamma},$$

og, ifølge (4)', som Betingelse for, at Maalestoksforholdets Minimum skal findes i Begyndelsespunktet, svarende til Punktet (0, β_0), at

$$\left[\frac{d \,.\, \mu\,(0,\beta)}{d\beta}\right]_0 = \frac{M}{P^2} \sum_{r=1}^{r=\infty} K_r\, k_r\, (k_r - \cos\beta_0)\, e^{k_r \gamma_0} = 0. \quad (10)$$

Er $K_2 = K_3 = K_4 = \ldots = 0$, saa reduceres (10) til $k_1 = \cos\beta_0$, som er Betingelsen (j) i § 4 c.

Skal Begyndelsespunktet svare til Polen, saa at β_0 er $= \beta_p$, Værdien af β i Polen, saa maa x-Axen svare til Meridianen $\frac{\pi}{2}$ og være en Symmetriaxe ligesom y-Axen. Betingelsen herfor er, ifølge (8), at

$$k_r = 2r - 1, \quad (11)$$

og samtidig hermed vil man i (8) have

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} K_r\, e^{k_r \gamma_0} = 0, \text{ idet } e^{\gamma_0} \text{ er } = e^{\gamma_p} = 0.$$

Ifølge Formlerne (1)', (1)'' og (1)''' i § 2 faas, naar

$\beta_0 = \beta_p = 0$,

$k_1 = \cos\beta_0$, men $k_2, k_3, \ldots > \cos\beta_0$, altsaa $\frac{e^{k_r\gamma_0}}{P_0} = 0$ for $r > 1$,

saa at Minimum af μ bliver, ifølge (10) og (9),

$$\mu\,(0, \beta_0) = K_1 \frac{e^{\gamma_0}}{P_0},$$

hvori, naar Meridianen ikke skjærer Axen, $\frac{e^{\gamma_0}}{P_0}$ vil være $= 1$, samt

naar $\beta_0 = \beta_p \gtrless 0$,

$k_r > \cos^2\beta_0$, altsaa $\frac{e^{k_r\gamma_0}}{P_0} = 0$, som giver

$$\mu\,(0, \beta_0) = 0.$$

I Praxis vil der i Reglen kun kunne blive Tale om at anvende et meget indskrænket Antal Led i Rækkerne i (8). Hvis f. Ex. det Areal, der skulde fremstilles med en høj Grad af Nøjagtighed, var begrænset af Parallelerne (β_n) og (β_s) og Meridianerne ($+\alpha_1$) og ($-\alpha_1$), og der imellem de to Grænseparalleler ikke fandt nogen meget stærk eller uregelmæssig Variation

Sted i Krumningsradien M for Meridianen, vilde man ved en given Maalestok m for Projektionen, og naar β_0 sattes $= \frac{1}{2}(\beta_n + \beta_s)$, kunne indskrænke sig til følgende Betingelser:

$$\mu(\alpha_1, \beta_n) = \mu(\alpha_1, \beta_s), \left[\frac{d\mu(0,\beta)}{d\beta}\right]_0 = 0, \; 2m = \mu(0, \beta_0) + \mu(\alpha_1, \beta_n)$$

samt Betingelsen for, at $\frac{\mu(\alpha_1\, \beta_n)}{\mu(0, \beta_0)}$ er et Minimum, eller saa nær som mulig $= 1$. Disse 4 Betingelser, af hvilke dog den sidste bedst vilde kunne udelades, da den tilnærmelsesvis maa være en Følge af de 3 første, tilfredsstilles lettest ved i (8) at sætte $K_5 = K_6 = \ldots = 0$ og gaa ud fra vilkaarlig antagne Værdier for k_1, k_2, k_3 og k_4.

En meget simplere Fremgangsmaade vil, naar Meridianens Konkavitet mellem Grænseparallelerne β_n og β_s er vendt mod Axen, og Variationen af $\frac{P}{\sin \beta}$ ikke er meget stærk, være følgende:

Begyndelsespunktet $(0, \beta_0)$ tages i Midtpunktet af det Areal, der skal fremstilles, og Fladen overføres (jvfr. § 5) konformt paa en Kugle med Radius $= \frac{P_0}{\sin \beta_0}$. Derefter tages Punktet $(0, \beta_0)$ til Hjælpepol $(\beta_p^* = \beta_0^* = 0)$ for et System af Meridianer (α^*) og Paralleler (β^*), idet der enten til Midtemeridianen $(\alpha^* = 0)$ eller til Meridianen $\alpha^* = \frac{\pi}{2}$ vælges den, som gjennemskjærer Arealet efter dets største Udstrækning. Naar nu β_1^* er den største Værdi for β^* i Meridianen $(\alpha^* = 0)$ eller $(\alpha^* = \pm \pi)$, og β_2^* er den største Værdi for β^* i Meridianen $\alpha^* = \pm \frac{\pi}{2}$, saa opstilles Betingelserne:

$$\mu(0, \beta_1^*) = \mu\left(\frac{\pi}{2}, \beta_2^*\right) \text{ og } 2m = \mu(0, 0) + \mu(0, \beta_1^*), \qquad (o)$$

idet m er den for Projektionen forlangte Maalestok, og Minimum $\mu(0, 0)$ er Maalestoksforholdet i Begyndelses-

punktet $(0, \beta_0)$ eller Hjælpepolen $(0, \beta_p^* = \beta_0^* = 0)$. Til disse Betingelser endnu at føje Betingelsen for, at $\frac{\mu(0, \beta_1^*)}{\mu(0, 0)}$ bliver et Minimum, vil næppe være fornødent.

Man har nu

$$P^* = \frac{P_0}{\sin \beta_0} . \sin \beta^*, \text{ og, ifølge } (1)_c, \; e^{\gamma^*} = tg \frac{1}{2} \beta^*,$$

$$\text{altsaa } \frac{e^{\gamma_0^*}}{P_0^*} = \frac{\sin \beta_0}{P_0} . \frac{1}{2},$$

og, sættes da i (8) $K_3 = K_4 = \ldots = 0$, saa haves, ifølge (11), $k_1 = 1$ og $k_2 = 3$.

I Stedet for K_1 og K_2 indføres Maalestoksforholdets Minimum

$$\mu(0, \beta_0) = \mu(0, 0) = K_1 \frac{e^{\gamma_0^*}}{P_0^*} = K_1 . \frac{\sin \beta_0}{2 P_0} \text{ og } \frac{3 K_2}{K_1} = K;$$

altsaa sættes

$$K_1 = 2 . \frac{P_0}{\sin \beta_0} . \mu(0, 0) \text{ og } \frac{K_2}{K_1} = \frac{1}{3} K.$$

Derved faas af (8) og (9):

$$\left.\begin{aligned} y &= 2 \frac{P_0}{\sin \beta_0} . \mu(0,0) . tg \frac{1}{2} \beta^* \left[\cos \alpha^* + \frac{1}{3} K . tg^2 \frac{1}{2} \beta^* . \cos 3\alpha^* \right], \\ x &= 2 \frac{P_0}{\sin \beta_0} . \mu(0,0) . tg \frac{1}{2} \beta^* \left[\sin \alpha^* + \frac{1}{3} K . tg^2 \frac{1}{2} \beta^* . \sin 3\alpha^* \right], \end{aligned}\right\} (12)$$

og

$$\left.\begin{aligned} &\mu^2(\alpha^*, \beta^*) = \\ &\frac{\mu^2(0, 0)}{\cos^4 \frac{1}{2} \beta^*} \left[\left(1 + K . tg^2 \frac{1}{2} \beta^* \right)^2 - 4 K . tg^2 \frac{1}{2} \beta^* . \sin^2 \alpha^* \right], \end{aligned}\right\} (13)$$

hvori $\mu(0, 0)$ og K skulle bestemmes saaledes, at Betingelserne (o) blive tilfredsstillede.

Af (13) og den 1ste Betingelse (o) faas da

$$\left.\begin{aligned} \mu(0, \beta_1^*) &= \frac{\mu(0, 0)}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta_1^*} \left(1 + K . tg^2 \frac{1}{2} \beta_1^* \right) = \mu\left(\frac{\pi}{2}, \beta_2^*\right) \\ \text{og } \mu\left(\frac{\pi}{2}, \beta_2^*\right) &= \frac{\mu(0, 0)}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta_2^*} \left(1 - K . tg^2 \frac{1}{2} \beta_2^* \right) = \mu(0, \beta_1^*), \end{aligned}\right\} (14)$$

idet der altsaa i (12), (13) og (14) maa, ifølge begge (14), indsættes

$$K = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \beta_1^* - \cos^2 \frac{1}{2} \beta_2^*}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta_1^* \cdot tg^2 \frac{1}{2} \beta_2^* + \cos^2 \frac{1}{2} \beta_2^* \cdot tg^2 \frac{1}{2} \beta_1^*} \qquad (15)$$

og, ifølge den 2den Betingelse (o), ligeledes indsættes

$$\mu(0, 0) = \frac{2m}{1 + \frac{1 + K \cdot tg^2 \frac{1}{2} \beta_1^*}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta_1^*}}. \qquad (16)$$

Det i disse Formler ved $\mu(\alpha^*, \beta^*)$ betegnede Maalestoksforhold skulde, ifølge (5) i § 5, egentlig have været betegnet ved $\mu_2(\alpha^*, \beta^*)$, idet det endelige Maalestoksforhold er

$$\mu(\alpha_1, \beta) = \mu_1(\alpha, \beta') \cdot \mu_2(\alpha^*, \beta^*),$$

hvori β', ifølge (6), kan beregnes af β, og derefter paa Kuglen α^* og β^* beregnes af α og β'.

Det karakteristiske ved den i Formlerne (12) til (16) fremstillede Projektion, der for $\beta_1 = \beta_2$, som giver $K = 0$, gaar over til den stereografiske (§ 3 c), er altsaa det, at Maalestoksforholdets Variation er afpasset efter Formen af det Areal, der skal fremstilles, saaledes, at Variationen er mindst i den Retning, i hvilken Arealets Udstrækning er størst, og størst i den Retning, i hvilken Udstrækningen er mindst, saa at Maalestoksforholdet ved Arealets Grænse i begge disse Retninger naar den samme Maximumsværdi, ɔ: $\mu(0, \beta_1^*) = \mu\left(\frac{\pi}{2}, \beta_2^*\right)$. En for Projektionen valgt Maalestok m, beliggende midt imellem Maximumsværdien $\mu(0, \beta_1^*)$ og Minimumsværdien $\mu(0, 0)$ i Arealets Midtpnnkt (Begyndelsespunktet for x og y) vil da med den mindst mulige Fejl kunne benyttes over hele det fremstillede Areal.

Til Sammenligning med de i de foregaaende §§ fremstillede konforme Projektioner, specielt med „den stereografiske Projektion" (§ 3 c) og „den konforme cylindriske Projektion" (§ 4 a), begge anvendte paa den for en ringe Variation af μ fordelagtigste Maade, ville vi antage, at det Areal, der skal fremstilles, er beliggende paa en Kugle med Radius $\frac{P_0}{\sin \beta_0} = 1$ og har en langagtig Form, symmetrisk med Hensyn til 2 paa hinanden lodrette Storcirkelbuer, samt at dets største Udstrækning er $= \pi$, dets mindste $= \frac{\pi}{2}$.

Vælges Midtpunktet til Begyndelsespunkt og til Pol, saa at $\beta_0 = \beta_p = 0$, saa haves $\beta_1^* = \beta_1 = \frac{\pi}{4}$ og $\beta_2^* = \beta_2 = \frac{\pi}{2}$, $a^* = a$, som, indsat i (15) og (14), giver Maximum

$$\mu(0, \beta_1) = \mu\left(\frac{\pi}{2}, \beta_2\right) = 1{,}2472 \,.\, \mu(0, 0),$$

medens den stereografiske Projektion med den samme Pol og de samme Betegnelser giver for Maximum af μ, ifølge (e) i § 3 c,

$$\mu(\beta_2) = 2 \,.\, \mu(0, 0)$$

Vilde man anvende den konforme cylindriske Projektion, maatte man for at erholde den mindst mulige Variation af μ, tage den Storcirkel, der indeholder Arealets største Udstrækning π, til Hjælpeækvator, med Hensyn til hvilken den største sfæriske Afstand (Brede) altsaa vilde blive $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} = \beta_1$. Ifølge (f)' i § 4 a faar man da for Parallelen $\left(\beta^* = \frac{\pi}{2} - \beta_1 = \frac{\pi}{4} = \beta_1\right)$

$$\mu(\beta_1) = \frac{\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin \beta_1} = \sqrt{2} \,.\, \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}4142 \,.\, \mu\left(\frac{\pi}{2}\right);$$

men heri er $\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ svarende til det samme Punkt, Arealets Midtpunkt, som vi i de 2 foregaaende Projektioner have betegnet ved (0, 0).

Benævne vi den i Formlerne (12) til (16) fremstillede Projektion „den nøjagtige konforme Projektion", saa bliver altsaa Resultatet af denne Sammenligning, at Forholdet mellem det største og det mindste Maalestoksforhold bliver ved et sfærisk Areal med Dimensionerne π og $\frac{\pi}{2}$

1,2472 . . . ved den nøjagtige konforme Projektion,
1,4142 . . . — — konforme cylindriske — ,
2,0000 . . . — — stereografiske — ;

men, hvilke Dimensioner man end vilde give det sfæriske Areal, vilde Resultatet af en Sammenligning mellem de forskjellige foran omtalte konforme Projektioner stedse med Hensyn til Maalestoksforholdets Variation falde ud til Fordel for den, som vi her — i

relativ Forstand — have kaldt den „nøjagtige". At „den konforme koniske Projektion" (§ 4 c), som ikke forekom i det foran staaende Exempel, aldrig kan give en saa ringe Variation i Maalestoksforholdet som dens specielle Form, „den konforme cylindriske", med Ækvatoren overskjærende Arealet symmetrisk i Retning af dettes største Udstrækning, er indlysende.

OPGAVER TIL LØSNING.

Følgende Sætninger om det i min Afhandling i Tidsskrift for Mathematik for 1887, S. 141 undersøgte kvadratiske Komplex, hvis simpleste geometriske Definition viste sig at være den, at Projektionen af et givet Punkt paa en vilkaarlig af Komplexets Linier ligger paa en given Kugle, ønskes beviste.

511. Komplexets Linier afskjære af uendelig mange Par af koncentriske Kugler Stykker, der fra et fast Punkt ses under ret Vinkel.

512. Komplexets Linier skjære uendelig mange Par af Kugler i fire harmoniske Punkter.

513. Komplexets Linier afskjære af uendelig mange Par af Kugler Korder, der (for hvert Par) staa i et konstant Forhold.

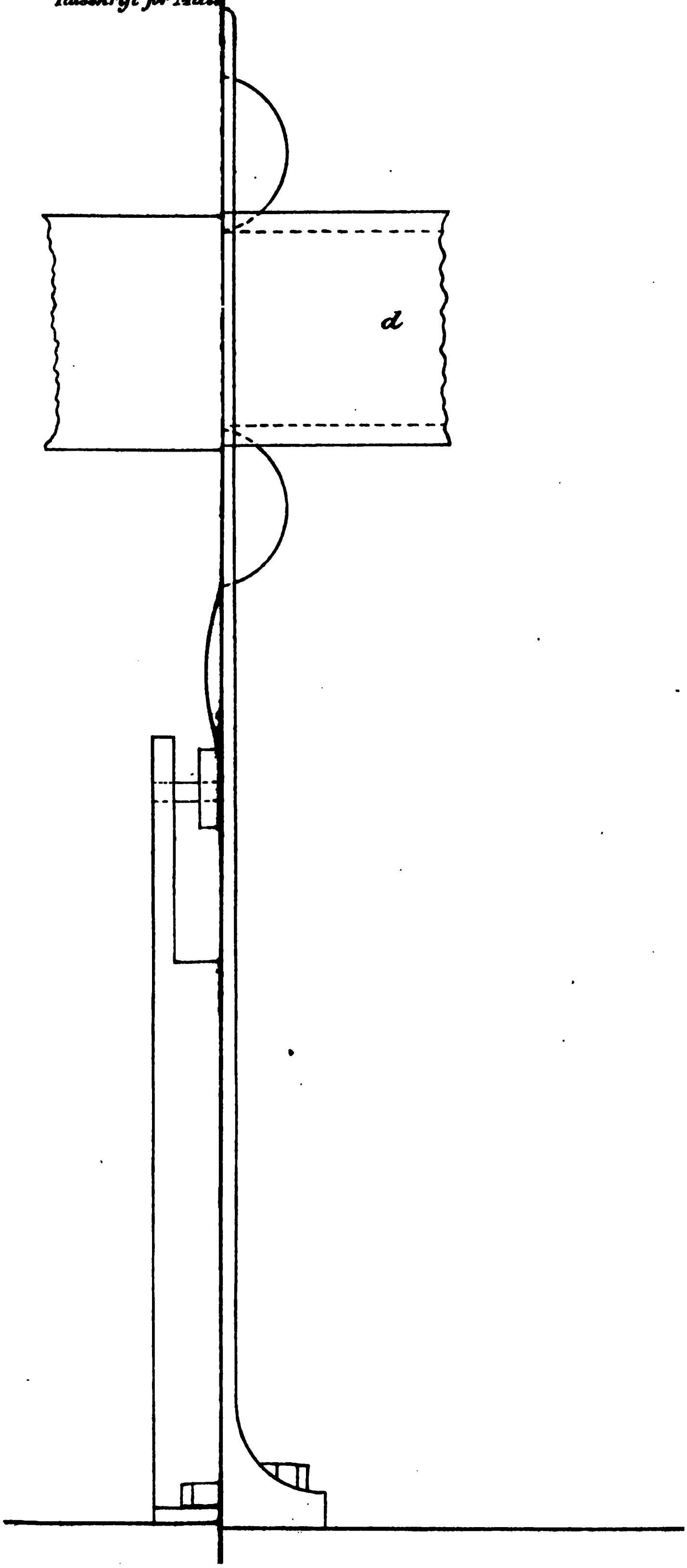
514. Komplexets Linier ville være Skjæringslinier mellem paa hinanden vinkelrette Tangentplaner til en Omdrejningsellipsoide.

515. Komplexets Linier kunne opfattes som Skjæringslinier mellem paa hinanden vinkelrette Tangentplaner til to konfokale Omdrejningsellipsoider.

(C. Juel).

516. At bestemme n Vægtlodder saaledes, at man ved dem paa en almindelig ligearmet Vægtskaal kan veje alle Vægte $1, 2, 3 \ldots p$, hvor p er saa stor som muligt.

(P. Vedel).


d

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von | Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og **H. G. Zeuthen.**

FEMTE RÆKKE.

Sjette Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

Hoffensberg & Trap's Etabl. — Kjøbenhavn.

1888.

FJERDE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Alhambravej 6, Kjøbenhavn, V.

OM MIDDELFEJL PAA VÆRDIEN AF LIVSFORSIKRINGER.

(AF J. P. GRAM).

1. Efter at den Del af Livsforsikringens mathematiske Theori, som omhandler Beregningen af Kapitalværdier og Præmier for de forskjellige Forsikringsarter, har naaet en Afslutning ved Opstillingen af den saakaldte kontinuerlige Methode[1]), og efterat Konstruktionen af Dødelighedstavler er bleven praktiseret saa ofte og paa saa forskjellige Maader, at det ikke mere frembyder nogen Vanskelighed at opstille en brugbar Dødelighedstavle paa Grundlag af givne Erfaringer, om end der fra et rent theoretisk Standpunkt kan gjøres adskillige Indvendinger mod de Fremgangsmaader, som hyppigst benyttes, have Teknikerne efterhaanden ogsaa henvendt Opmærksomheden paa andre Spørgsmaal, som vedrøre Livsforsikringens Theori.

Et saadant Spørgsmaal, som ganske vist allerede er behandlet af flere Mathematikere, men dog ikke endnu kan siges at være tilfredsstillende løst, er Bestemmelsen af Størrelsen af den Extrareserve, som en Forsikringsanstalt bør have ud over den egentlige „fornødne Formue" eller Præmiereserve. Nødvendigheden af en saadan Extrareserve vil fremgaa af, at den beregnede fornødne Formue kun vil være rigtig under den Forudsætning, at Dødelighed og Rentefod fremtidig stemme overens med de i Tavlerne angivne Gjennemsnitsværdier. Men selv om en saadan Overensstemmelse finder Sted, naar man betragter en længere Aarrække, kan den dog ingenlunde ventes at indtræffe for saa kort et Tidsrum som et enkelt Aar, og endog den største Anstalt maa være forberedt paa forholdsvis store Afvigelser i de enkelte Aar fra, hvad der efter Dødelighedstavlerne skulde ventes som normale Tal.

Med Bedømmelsen af Indflydelsen af saadanne Forhold som

[1]) Woolhouse: On an improved theory etc. Assurance Magazine Vol. XV.
Jvfr. Tychsens Afhandling i dette Tidsskrift. Aarg. 1875. S. 49.

en Forandring af Rentefoden eller en gjennemgaaende Ændring af Dødeligheden i den ene eller den anden Retning ere de fleste Livsforsikringsmathematikere ret fortrolige, og der foreligger saa stort et Udvalg af forskjellige Tavler, at en Undersøgelse af disse Forhold kan foretages med forholdsvis stor Lethed. Mindre gjælder dette derimod om Bedømmelsen af den tilfældige Usikkerhed, som fremkommer ved, at Dødelighedstavlerne ifølge Sagens Natur kun kunne fremstille visse Middelværdier, og at Afvigelser i den ene eller den anden Retning fra disse nødvendigvis ville fremkomme. At der i de gunstige Aar bør henlægges en Extrareserve til Dækning af en overskydende Dødelighed i de ugunstige er klart, men Spørgsmaalet er, hvor stor denne Reserve bør være.

Besvarelsen af dette Spørgsmaal er fra forskjellige Synspunkter allerede forlængst forsøgt af Tetens[1]), Kanner[2]) og Bremiker[3]). Senere har Westergaard[4]) undersøgt den tilsvarende Opgave for Brandforsikringers Vedkommende, og endelig har for faa Aar siden Wittstein[5]) atter behandlet den samme Opgave. Uden at gaa ind paa disse forskjellige Forfatteres Fremstilling, skulle vi her kun fremhæve, at de betydeligste af dem i det væsentlige stemme overens med Hensyn til det endelige Resultat af deres Undersøgelser.

Saavel Bremiker og Westergaard, der benytte de mindste Kvadraters Methode som Udgangspunkt, som Wittstein, der nærmest støtter sig paa lignende Betragtninger som Tetens og Kanner, ende med at erklære den saakaldte Middelusikkerhed — en Størrelse der er ganske analog med en paa sædvanlig Maade beregnet Middelfejl — som Afvigelsernes fundamentale Maal, naar de ensartede Forsikringer ere til Stede i stort Antal. Den vigtigste praktiske Forskjel imellem dem fremtræder i Bestemmelsen af den Konstant,

---

[1]) Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Leipzig 1785.

[2]) Bestimmung des mittleren Risico bei Lebensversicherungen. Berlin 1870.

[3]) Das Risico bei Lebensversicherungen. Berlin 1859. Jvfr. Assurance Magazine. Vol. XVI, p. 216.

[4]) Ehrenzweig: Assecuranz Jahrbuch. V. Jahrg. 1884. S. 100.

[5]) Das mathematische Risiko der Versicherungs-Gesellschaften. Hannover, 1885.

med hvilken man rettelig bør multiplicere den fundne Middelusikkerhed for at bestemme Extrareservens Størrelse. Men dette er et meget underordnet Spørgsmaal, om hvilket enhver kan have sin Mening. I hvert enkelt foreliggende Tilfælde vil dets Besvarelse sikkerlig bero mere paa praktiske end paa theoretiske Grunde. Thi vel er en stor Extrareserve meget ønskelig, men i det mindste for yngre Anstalters Vedkommende ville de for Haanden værende Midler i Reglen neppe tilstede noget stort Spillerum for Valget.

Men det er i alle Tilfælde af Vigtighed, at man er i Stand til at foretage en korrekt Beregning af den theoretiske Middelusikkerhed uden Anvendelse af alt for meget Arbejde. Allerede i min Doktordisputats fra 1879 har jeg (i Thesis 5) fremhævet Betydningen heraf og omtrent paa samme Tid udviklet de Formler, som maatte komme til Anvendelse derved, i et Manuskript, som med uvæsentlige Ændringer danner Grundlaget for nærværende Afhandling. Iøvrigt skal fremhæves, at de danske Livsforsikringsmathematikere siden Oppermanns Tid have været ret fortrolige med Behandlingen af denne Opgave, og at en Beregning af Middelusikkerheden formentlig allerede for flere Aar siden har været gjennemført i alle tre danske Livsforsikringsanstalter.

Ved den følgende Behandling af Opgaven benytter jeg principielt den kontinuerlige Methode, som alene kan føre til saa simple og elegante Formler, som Praxis kræver, og giver fuldstændig tilstrækkelig Nøjagtighed. Grundlaget er iøvrigt i det væsentlige det samme som hos Bremiker. Betegnelserne ere med enkelte Modifikationer de, som benyttes af de engelske Livsforsikringsmathematikere, og som ogsaa anvendes af de skandinaviske. Idet jeg med Hensyn til den sædvanlige Theori for Værdiberegninger henviser til Tychsens ovenfor citerede Afhandling, skal endnu kun tilføjes, at den egentlige Vanskelighed ved Behandlingen ikke ligger i Opstillingen af en Formel for de forskjellige optrædende Størrelser, hvilket i de fleste Tilfælde er meget simpelt, men derimod alene i at reducere det fundne Udtryk til den simpleste Form, og for saa vidt turde Opgaven ogsaa have en rent mathematisk Interesse.

2. Naar en forsikret Person afgaar ved Døden, fremkommer

der som Følge af den af ham med Anstalten afsluttede Forsikringskontrakt en Gevinst g for den ene eller den anden af Parterne. Denne regnes for positiv eller negativ, eftersom den tilfalder Forsikringsanstalten eller den Forsikrede. Ved r betegne vi fremdeles den aarlige Rentefod, ved v den tilsvarende Diskontofaktor, ved δ den kontinuerlige Rentefod, saa at altsaa

$$v = (1 + r)^{-1} = e^{-\delta},$$

hvor e er Grundtallet for de naturlige Logarithmer. Den Forsikredes nuværende Alder i Aar betegnes ved x, Tiden udtrykt i Aar ved t; endvidere betegnes ved G_t Nutidsværdien af den Gevinst g, som fremkommer, naar den nu x-aarige Forsikrede dør paa det Tidspunkt, da han har Alderen $x + t$, altsaa $G_t = g \, . \, v^t$. Vi se fuldstændig bort fra alle Præmietillæg, saaledes at der overalt kun optræde rene Nettoværdier; foruden af t afhænger altsaa G_t alene af Forsikringssummen og Nettopræmien, Rentefoden og den ved Tavlerne givne Dødelighed, saavelsom af de specielle Vilkaar for den paagjældende Forsikring.

Saaledes bliver altsaa f. Ex. for en sædvanlig livsvarig Livsforsikring mod Indskud J for en Forsikringssum S, ved Forsikringens Begyndelse

$$G_t = v^t \, (J \, (1 + r)^t - S) = J - v^t \, S.$$

Er derimod Forsikringen ophørende efter n Aars Forløb, bliver $G_t = J - v^t \, S$ for $t < n$, men $G_t = J$ for $t > n$, o. s. v.

Betegner man nu i Almindelighed ved l_x Antallet af levende x-aarige Personer og ved

$$w_i = \frac{l_{x+i-1} - l_{x+i}}{l_x}$$

Sandsynligheden for, at en nu x Aar gammel Person dør i Løbet af det $(x + i)$'te Aldersaar, og forudsættes foreløbig, at alle Dødsfald finde Sted ved Slutningen af Aaret, saa maa man have

$$W \equiv w_1 \, G_1 + w_2 \, G_2 + w_3 \, G_3 + \ldots = 0, \qquad \text{I}$$

eftersom hverken den ene eller den anden af de to Parter skal lide noget Tab ved Forsikringen. Denne Ligning, hvor Summen paa venstre Side fortsættes til de højeste Aldersklasser, eller om man vil, i det uendelige, gjælder ikke blot ved Forsikringens

Begyndelse men ogsaa paa ethvert senere Stadium, naar den for Forsikringen beregnede fornødne Formue tages med i Betragtning. Thi Ligning I tjener nemlig ikke blot til Bestemmelse af de nødvendige Indskud og Præmier, men, naar disse ere fastsatte, ogsaa paa et senere Stadium til Bestemmelsen af Forsikringens Værdi. Da w altid er en positiv Størrelse, maa Størrelserne G dels være positive, dels negative. I Reglen er Forholdet det, at G er enten stadig aftagende eller stadig voxende, saaledes at G paa et vist Stadium passerer Værdien 0. Størrelserne w ere givne ved Dødelighedstavlerne, deres Sum maa være lig 1, altsaa

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_\infty = 1.$$

Naar man i Stedet for Sandsynlighederne w i I indsætter andre Værdier end Dødelighedstavlens, faar man paa højre Side ikke 0 men en anden Størrelse ε. Da W er en lineær Funktion af samtlige w, kan dens Middelafvigelse fra 0 let bestemmes ved at søge Middelfejlen paa Funktionen W, som afhængig af Middelfejlene paa de enkelte w. Betegnes Middelfejlskvadratet ved Mf^2, saa vil altsaa, da Størrelserne G ere at betragte som Konstanter, haves

$$Mf^2(W) = G_1^2 Mf^2(w_1) + G_2^2 Mf^2(w_2) + G_3^2 Mf^2(w_3) + \ldots \qquad \text{II}$$

under Forudsætning af, at w'erne kunne betragtes som indbyrdes uafhængige. Dette er vel ikke Tilfældet, idet deres Sum skal være lig 1, men det er unødvendigt at tage Hensyn dertil, bl. a. af den Grund, at en af Størrelserne G vil være lig 0, og det tilsvarende w altsaa forsvinder af Ligningen I, hvorved de tilbageblivende w kunne betragtes som indbyrdes uafhængige, og det derefter fremgaaende Udtryk tor $Mf^2(W)$ vil ikke forandres ved Tilføjelse af det Led, som indeholder det udeladte G.

Værdien af $Mf(W)$ afgiver et passende Maal for Usikkerheden p ved dèn enkelte Forsikring; et tilsvarende Udtryk for en Samling af saadanne faas ved at summere Størrelserne $Mf^2(W)$, dannede for hver enkelt Persons Forsikring og af det udkomne uddrage Kvadratroden.

Haves specielt en Samling af ensartede Forsikringer for N lige gamle Personer, saa bestemmes altsaa den totale Middelusikkerhed M paa denne Samling ved Ligningen

$$\mu^2 = G_1^2 . NMf^2(w_1) + G_2^2 . NMf^2(w_2) + G_3^2 . NMf^2(w_3) + \ldots,$$

medens svarende til I faas

$$0 = G_1 . Nw_1 + G_2 . Nw_2 + G_3 . Nw_3 + \ldots$$

De i den sidste Ligning optrædende Faktorer til Størrelserne G betegne simpelthen det Antal Dødsfald, som ifølge Dødeligheds-tavlerne normalt maa ventes i Aldersklasserne $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ o. s. v., og de tilsvarende Faktorer i Udtrykket for μ^2 maa altsaa blive Middelafvigelserne, som svare til hine. Men Middel-afvigelsen fra Nw_i er som bekjendt bestemt ved

$$Mf^2 (Nw_i) = N . w_i (1 - w_i),$$

saaledes at man i den ovenstaaende Formel for μ^2 maa sætte

$$Mf^2 (w_i) = w_i (1 - w_i).$$

Formlen II ændres derved til

$$\mu^2 = G_1^2 w_1 (1 - w_1) + G_2^2 w_2 (1 - w_2) + G_3^2 w_3 (1 - w_3) + \ldots \quad \text{II}'$$

som det Udtryk, der bestemmer Usikkerheden paa den enkelte Forsikring. Summation af alle saaledes beregnede μ^2 giver atter den tilsvarende Størrelse M for hele Forsikringsbestanden.

Betydningen af M beror paa, at Fejlloven for Afvigelserne fra Normaldødeligheden for et større Antal Personer som første Tilnærmelse kan betragtes som exponentiel. Det samme vil da ogsaa gjælde om Fejlloven for Summen af Størrelserne ε, og naar altsaa Middelfejlen M er bekjendt, kan man tilnærmelsesvis bedømme Sandsynligheden for, at den virkelige Afvigelse fra det normale vil falde indenfor Grænserne $\pm M$, $\pm 2M$ o. s. v. Størrelsen M giver altsaa et naturligt Maal for den Usikkerhed, som klæber ved Beregningen af de gjensidige Forpligtelser, som Følge af, at Dødeligheden i de enkelte Aar afviger fra Tavlerne, selv om disse i det hele taget maa betragtes som et korrekt Udtryk for den gjennemsnitlige Dødelighed. Den kan derfor ogsaa opfattes som Middelfejlen paa den beregnede fornødne Formue.

Det kan bemærkes, at vi ved den angivne Fremstilling have taget saavel Gevinst som Tab paa den enkelte Forsikring i Betragtning paa en Maade, medens derimod Wittstein ved Bestemmelsen af sit Risikomaal kun tager Hensyn til de for Anstalten

ugunstige Tilfælde og derfor som saadant finder M multipliceret med en ægte Brøk.

For en og samme Forsikring vil G_t altid blive proportional med Forsikringssummen, hvis Kvadrat kan udskilles som Faktor af μ^2. Det er derfor praktisk at beregne de forskjellige Fundamentalstørrelser som svarende til Forsikringssummen 1 og for en enkelt Person. Naar disse først ere dannede, er den praktiske Udførelse af den øvrige Regning en let Sag.

3. Jeg har i det foregaaende Afsnit for større Tydeligheds Skyld taget Aaret som Enhed. Selvfølgelig kan man lige saa vel benytte andre Tidsafsnit som saadan, og hele Udviklingen lettes i høj Grad ved at gjøre Tidsenheden forsvindende lille. Derved gaar Størrelsen w_t over til

$$Lim_{h=0} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+h}}{l_x} = - \frac{l'_{x+t}}{l_x} dt,$$

hvor l'_x betegner $\frac{dl_x}{dx}$, medens Faktoren $w_t(1 - w_t)$ ligeledes erstattes ved $-\frac{l'_{x+t}}{l_x} dt$, og alle Summerne gaa over til Integraler mellem Grænserne $t = 0$ og $t = \infty$. Man faar altsaa i Stedet for Ligningerne I og II'

$$\int_0^\infty - \frac{l'_{x+t}}{l_x} G_t \, dt = 0 \qquad \text{III}$$

og

$$\mu^2 = \int_0^\infty - \frac{l'_{x+t}}{l_x} G_t^2 \, dt, \qquad \text{IV}$$

medens samtidig $\int_0^\infty - \frac{l'_{x+t}}{l_x} dt = 1.$

Det negative Fortegn for l'_{x+t} hidrører fra, at denne Størrelse altid er negativ, eftersom l_x stadig er aftagende.

Udviklingen af de specielle Formler lettes i høj Grad ved Benyttelsen af et Par Hjælpesætninger, som vi først skulle udvikle.

Er almindelig $G_t = \gamma_t + K$, hvor K er en Konstant, faas

$$\int_0^\infty -\frac{l'_{x+t}}{l_x}\gamma_t\,dt + K = 0, \qquad \text{V}$$

og

$$\mu^2 = \int_0^\infty -\frac{l'_{x+t}}{l_x}(\gamma_t + K)^2\,dt =$$

$$\int_0^\infty -\frac{l'_{x+t}}{l_x}\gamma_t^2\,dt + 2K\int_0^\infty -\frac{l'_{x+t}}{l_x}\gamma_t\,dt + K^2,$$

eller, ifølge V,

$$\mu^2 = \int_0^\infty -\frac{l'_{x+t}}{l_x}\gamma_t^2\,dt - K^2. \qquad \text{VI}$$

Er fremdeles indenfor et vist Tidsinterval

$$G_t = \alpha + \beta v^t,$$

hvor α og β ere Konstanter, et Tilfælde, som vil vise sig almindeligt, saa faas den tilsvarende Del af Integralet i III at være

$$\alpha\int -\frac{l'_{x+t}}{l_x}dt + \beta\int -\frac{l'_{x+t}}{l_x}v^t\,dt, \qquad \text{VII}$$

medens den tilsvarende Del af μ^2 vil være af Formen

$$\alpha^2\int -\frac{l'_{x+t}}{l_x}dt + 2\alpha\beta\int -\frac{l'_{x+t}}{l_x}v^t\,dt + \beta^2\int -\frac{l'_{x+t}}{l_x}v^{2t}\,dt, \qquad \text{VIII}$$

hvor Integralerne blive at udstrække over hele det paagjældende Tidsinterval.

De i disse to Formler optrædende Integraler have simple Betydninger. Integralet

$$\int -\frac{l'_{x+t}}{l_x}dt$$

betegner simpelthen Sandsynligheden for, at en x-aarig Person dør i Løbet af det paagjældende Tidsinterval. Vi betegne det i det følgende ved q_x med tilføjede Indices, bestemmende Grænserne. Det andet Integral

$$\int -\frac{l'_{x+t}}{l_x}v^t\,dt$$

angiver Kapitalværdien af en Livsforsikring for en x-aarig Person, gjældende alene for det samme Tidsrum; denne Værdi betegnes

almindelig ved A_x med tilføjede Indices. Og endelig betegner det tredie Integral

$$\int - \frac{l'_{x+t}}{l_x} v^{2t}\, dt$$

Værdien af en ganske analog Forsikring, gjældende for samme Tidsrum, og som kun adskiller sig fra den først nævnte ved, at Værdien er beregnet med den dobbelte Rentefod, altsaa svarende til den kontinuerlige Rentefod $2\,\delta$ i Stedet for δ. Vi betegne denne Værdi analogt med den foregaaende ved $\mathbf{A}_x$.

Man ser heraf, at man som Hjælpemiddel ved Udførelsen af den numeriske Beregning maa have et Sæt Tavler analoge med de sædvanlige Grundtavler men svarende til den dobbelte Rentefod. Da det imidlertid kun drejer sig om lutter kontinuerlige Værdier, kunne disse Tavler indskrænkes meget betydelig. Det er strengt taget tilstrækkeligt, at de indeholde $\mathbf{D}_x$ „de diskonterede Antal levende“ for alle Aldersklasser samt de kontinuerlige livsvarige Livrenter $\mathbf{a}_x$, og det er ogsaa hensigtsmæssigt strax at beregne i det mindste Værdierne $\mathbf{A}_x = 1 - 2\,\delta\,\mathbf{a}_x$ af de livsvarige Livsforsikringer.

4. Efter disse almindelige Betragtninger gaa vi over til Undersøgelsen af de vigtigste specielle Forsikringsarter og begynde med en særegen Klasse, hvis Hovedtyper paa den ene Side er den livsvarige Livrente, paa den anden Side den livsvarige Livsforsikring med livsvarig Præmiebetaling.

Livsvarig strax begyndende Livrente. Den kontinuerlige aarlige Livrente være lig 1, Indskud engang for alle J er altsaa lig a_x. Dør den Forsikrede i Alderen $x + t$, faas Gevinsten, henført til Livrentens Begyndelsestidspunkt, at være

$$G_t = a_x - \int_0^t v^t\, dt = J - \frac{1 - v^t}{\delta} = \frac{1}{\delta}(\delta J - 1) + \frac{1}{\delta} v^t.$$

Betingelsesligningen V giver, idet A_x er Værdien af en livsvarig Livsforsikring lig 1,

$$\frac{1}{\delta} A_x + \frac{1}{\delta}(\delta J - 1) = 0,$$

hvoraf findes $J = \frac{1 - A_x}{\delta} = a_x$, altsaa den bekjendte Relation

$$A_x = 1 - \delta a_x.$$

Man kan følgelig ogsaa skrive

$$G_t = \frac{1}{\delta} v^t - \frac{1}{\delta} A_x,$$

hvoraf, ifølge VI, for Grænserne $t = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$

$$\mu^2 = \frac{1}{\delta^2} (\mathsf{A}_x - A_x^2). \tag{1}$$

Livsvarig Livsforsikring mod Indskud A_x giver

$$G_t = A_x - v^t,$$

altsaa faas strax ved Sammenligning med det ovenfor fundne

$$\mu^2 = \mathsf{A}_x - A_x^2. \tag{2}$$

Formlerne (1) og (2) gjælde først og fremmest som Udtryk for μ^2 ved Forsikringens Begyndelse, men det er klart, at de lige saa vel gjælde paa ethvert senere Tidspunkt, idet x betegner den da opnaaede Alder, fordi Forsikringen til enhver Tid kan betragtes som en ny Forsikring, der tegnes mod den tilsvarende Præmiereserve som Indskud.

Livsvarig Livsforsikring mod livsvarig Præmie. Forsikringssummen være lig 1; den kontinuerlige aarlige Præmie p. Saa er ved Forsikringens Begyndelse

$$p = \frac{A_x}{a_x} = \frac{1 - \delta a_x}{a_x} = \frac{1}{a_x} - \delta = A_x (p + \delta),$$

og

$$G_t = \frac{p(1 - v^t)}{\delta} - v^t = \frac{p}{\delta} - \frac{p + \delta}{\delta} v^t, \quad (t = 0 \ldots t = \infty)$$

saa at, ifølge VI,

$$\mu^2 = \left(\frac{p + \delta}{\delta}\right)^2 \mathsf{A}_x - \left(\frac{p}{\delta}\right)^2$$

eller ogsaa, da $p = A_x (p + \delta)$,

$$\mu^2 = \left(\frac{p + \delta}{\delta}\right)^2 (\mathsf{A}_x - A_x^2), \tag{3}$$

eller

$$\mu^2 = \frac{1}{\delta^2 a_x^2} (\mathsf{A}_x - A_x^2). \tag{3'}$$

Den første Formel (3) er at foretrække, fordi den ogsaa gjælder for ældre Forsikringer. Thi naar en nu x-aarig Person har løbende en Forsikring, tegnet mod Præmien p paa et hvilket som helst tidligere Tidspunkt, saa hører til denne Forsikring nu en Præmiereserve

$$V = A_x - pa_x = 1 - (p + \delta)\, a_x.$$

Følgelig bliver almindelig

$$G_t = V + \frac{p}{\delta} - \frac{p+\delta}{\delta} v^t = A_x + \frac{p}{\delta}(1 - \delta a_x) - \frac{p+\delta}{\delta} v^t,$$

eller

$$G_t = \frac{p+\delta}{\delta} A_x - \frac{p+\delta}{\delta} v^t,$$

og altsaa, ifølge VI,

$$\mu^2 = \left(\frac{p+\delta}{\delta}\right)^2 (\mathbf{A}_x - A_x^2),$$

som netop er Formlen (3). Det samme Resultat faas ogsaa strax, naar man bemærker, at Usikkerheden er ganske den samme som for en ny Forsikring af Størrelsen $1 - V = (p + \delta)\, a_x$, for hvilken der betales Præmien p.

Anm. Det er ikke uden Interesse at lægge Mærke til, at den her anførte Bestemmelse af V kan faas umiddelbart ved et simpelt Ræsonnement. Tænker man sig nemlig, at den Forsikrede vilde have sin Forsikringssum udbetalt strax i Stedet for ved sin Død, da maatte han aabenbart godtgjøre Anstalten Forskjellen mellem Forsikringssummen 1 og den til Stede værende Præmiereserve V, altsaa $1 - V$. Transaktionen kunde ske paa den Maade, at han laaner Forsikringssummen og betaler Renten δ af denne, saalænge han lever, og desuden vedbliver at holde Forsikringen vedlige ved at betale den aarlige Præmie p, ialt altsaa $p + \delta$ aarlig. Forsikringssummen vilde da i Dødsøjeblikket være disponibel til Dækning af Gjælden. Men Værdien af de aarlige Præstationer $p + \delta$ er $(p + \delta)\, a_x$, som altsaa maa være lig $1 - V$.

De tre fundne Formler (1)—(3) ligne hinanden i paafaldende Grad, idet i dem alle indgaar Faktoren $(\mathbf{A}_x - A_x^2)$ blot multipliceret med forskjellige Konstanter; de have tillige alle den Ejen-

dommelighed, at de gjælde paa et hvilket som helst Tidspunkt af Forsikringen, naar man blot lader x betegne den da opnaaede Alder.

Men de have endnu en langt større Rækkevidde, end det synes, idet vi ved blotte tænkte Modifikationer af Dødelighedstavlerne fra dem umiddelbart kunne gaa over til de analoge Formler for en stor Klasse af almindelig forekommende Forsikringer.

Tænker man sig nemlig først Dødelighedstavlen ændret saaledes, at alle de Personer, som opnaa Alderen $x + n$, dø netop paa dette Tidspunkt, medens Dødeligheden i de lavere Aldersklasser er uforandret, gaar den livsvarige Livrente a_x over til den om n Aar ophørende Rente, hvis Værdi betegnes ved ${}_na_x$. Den livsvarige Livsforsikring gaar samtidig over til en „Livsforsikring med Udbetaling i levende Live“ ved Alderen $x + n$ (Kapitalforsikring med Udbetaling ved Dødsfald), hvis Kapitalværdi betegnes ved ${}_nÆ_x$. Mutatis mutandis gjælder for disse Forsikringer alt, hvad der forhen er sagt om livsvarige Forsikringer. Altsaa faas for den n Aar varende

Ophørende Livrente

$$\mu^2 = \frac{1}{\delta^2}({}_n\mathbf{Æ}_x - {}_nÆ_x^2); \tag{4}$$

Livsforsikring med Udbetaling mod Indskud

$$\mu^2 = {}_n\mathbf{Æ}_x - {}_nÆ_x^2; \tag{5}$$

samme mod Præmie p i hele Forsikringstiden

$$\mu^2 = \left(\frac{p+\delta}{\delta}\right)^2 ({}_n\mathbf{Æ}_x - {}_nÆ_x^2). \tag{6}$$

Ogsaa den ophørende Livsforsikring mod Indskud engang for alle tilsteder en lignende Behandling. Man behøver kun at forudsætte, at der ingen Dødsfald indtræffer efter Alderen $x + n$ Aar, saa at alle de Personer, som opleve denne Alder, faa uendelig lang Levetid. Da Værdien af en Livsforsikring for en saadan udødelig Person er lig 0, gaar A_x over til ${}_nA_x$, Værdien af en om n Aar ophørende Livsforsikring, og følgelig faas for denne, tegnet mod Indskud,

$$\mu^2 = {}_n\mathbf{A}_x - {}_nA_x^2. \tag{7}$$

Resultat findes direkte saaledes. Hvis den Forsikrede

sikringens Udløb, bliver

$$G_t = {}_nA_x - v^t; \qquad (t < n),$$

t senere Tidspunkt, faas

$$G_t = {}_nA_x. \qquad (t > n).$$

$$\ldots x - v^t)^2\, dt + \int_n^\infty - \frac{l'_{x+t}}{l_x}\, {}_nA_x^2\, dt,$$

...n ved ${}_nq_x$ og $q_{x,\,n}$ betegner Sandsynligheden for, at ...aarige Person dør henholdsvis før eller efter n Aars Udløb,

$$\mu^2 = {}_nq_x \cdot {}_nA_x^2 - 2\, {}_nA_x^2 + {}_n\mathbf{A}_x + q_{x,\,n} \cdot {}_nA_x^2 = {}_n\mathbf{A}_x - {}_nA_x^2,$$

idet ${}_nq_x + q_{x,\,n} = 1$.

Ligeledes faas for en i n Aar opsat Livsforsikring mod Indskud $A_{x,\,n}$

$$\mu^2 = \mathbf{A}_{x,\,n} - A_{x,\,n}^2. \qquad (8)$$

For at føre denne tilbage til den livsvarige Livsforsikring tænker man sig blot Dødelighedstavlen modificeret saaledes, at de n første Aars Dødsfald henlægges til Forsikringens Begyndelse. De tilsvarende Forsikringssummer maatte da samtidig indbetales og udbetales, hvorfor disse Dødsfald kunne lades helt ude af Betragtning. Den til en saadan Dødelighedstavle svarende livsvarige Livrente vilde bestaa af to Dele, en sædvanlig Annuitet varende i n Aar, og en sædvanlig i n Aar opsat Livrente. Betragtningen af en saadan sammensat Rente fører dog ikke til Bestemmelsen af Middelusikkerheden paa den opsatte Livrente. Til denne kommer man imidlertid, naar man betragter en Dødelighedstavle, hvorefter der af l_x x-aarige Personer dør $l_x - l_{x+n}$ i Alderen $x + n$, og derefter den normale Dødelighed indtræder. Den hertil svarende livsvarige Livrente er ligeledes sammensat af en Annuitet og en opsat Livrente og faar Kapitalværdien

$$\frac{1 - v^n}{\delta} + a_{x,\,n},$$

medens den tilsvarende Livsforsikring bliver

$${}_nq_x\, v^n + A_{x,\,n},$$

idet $l_x \cdot {}_nq_x$ Personer dø som $(x + n)$-aarige.

Følgelig faas for Livrenten

$$\mu^2 = \frac{1}{\delta^2}\left[({}_nq_x\, v^{2n} + \mathbf{A}_{x,n}) - ({}_nq_x\, v^n + A_{x,n})^2\right]. \tag{9}$$

og da den af Dødeligheden uafhængige Annuitet ikke kan have nogen Indflydelse paa μ, vil den fundne Formel fremstille Middelusikkerheden paa selve den i n Aar opsatte Livrente, tegnet mod Indskud engang for alle.

Dette kan ogsaa let eftervises ved direkte Beregning, dog vilde man derved kun vanskelig naa til den anførte symmetriske Form, hvis denne ikke forud var bekjendt.

Endvidere kan fremhæves, at ogsaa den opsatte Kapitaludbetaling $E_{x,n}$ kommer ind under den samme store Klasse; den kan nemlig betragtes som en opsat Livsforsikring, hvor alle de, som efter Tavlerne skulde overleve Alderen $x + n$, dø ved Opnaaelsen af denne Alder. I Stedet for $A_{x,n}$ faas altsaa $E_{x,n}$, saa at

$$\mu^2 = \mathbf{E}_{x,n} - E^2_{x,n}, \tag{10}$$

der ogsaa kan skrives som

$$\mu^2 = v^{2n}\, q_{x,n}(1 - q_{x,n}) = v^{2n}\,\frac{l_{x+n}(l_x - l_{x+n})}{l_x^2}. \tag{10'}$$

Skjønt jeg ikke skal gaa nærmere ind paa Undersøgelsen af Forsikringer paa to Liv, skal dog ogsaa nævnes, at baade Livsforsikring paa kortest og paa længst Liv for to Forsikrede samt de tilhørende Livrenter høre til den samme Klasse som de allerede betragtede Forsikringsarter, og at Udtrykkene for de tilsvarende μ^2 derfor uden videre kunne opskrives som ganske analoge med Formlerne (1)—(3). Alle de fundne Formler have som det ses, den typiske Form $\mu^2 = k\,.\,(f(2\delta) - (f(\delta))^2)$ og gjælde saavel ved Forsikringens Begyndelse som paa ethvert senere Tidspunkt, medens Forsikringen løber.

5. Endnu staar tilbage at undersøge nogle vigtige Forsikringsarter, som ikke høre ind under den i forrige Afsnit omtalte Klasse og som derfor maa behandles særskilt.

Livsvarig Livsforsikring mod kortvarig Præmiebetaling.

Præmien, som antages at skulle betales endnu i n Aar, være p, Policens Værdi V. Man faar

$$G_t = \frac{p(1-v^t)}{\delta} + V - v^t, \quad \text{for } t < n,$$

$$G_t = \frac{p(1-v^n)}{\delta} + V - v^t, \quad \text{for } t > n.$$

Ligningen

$$\int_0^\infty -\frac{l'_{x+t}}{x} G_t\, dt = \int_0^n -\frac{l'_{x+t}}{l_x}\left(\frac{p(1-v^t)}{\delta} + V - v^t\right) dt +$$
$$\int_n^\infty -\frac{l'_{x+t}}{l_x}\left(\frac{p(1-v^n)}{\delta} + V - v^t\right) dt = 0$$

giver herefter $V = A_x - p \,.\, {}_na_x$, som det skal være. For at beregne μ^2 sætte vi først $p + \delta V = p\, {}_nÆ_x + \delta A_x = K$, hvorefter

$$\delta \,.\, G_t = -(p+\delta)\, v^t + K, \quad (t < n),$$
$$\delta \,.\, G_t = -pv^n - \delta v^t + K, \quad (t > n),$$

saa at

$$\delta^2 . \mu^2 = \int_0^n -\frac{l'_{x+t}}{l_x}(p+\delta)^2 v^{2t}\, dt + \int_n^\infty -\frac{l'_{x+t}}{l_x}(pv^n + \delta v^t)^2\, dt - K^2.$$

eller

$$\begin{aligned}\delta^2\, \mu^2 &= p^2\, {}_n\mathsf{A}_x + 2p\delta\, {}_n\mathsf{A}_x + \delta^2\, {}_n\mathsf{A}_x \\ &+ p^2\, v^{2n}\, q_{x,n} + 2p\delta v^n\, A_{x,n} + \delta^2\, \mathsf{A}_{x,n} \\ &- p^2\, {}_nÆ_x^2 - 2p\delta\, {}_nÆ_x\, A_x - \delta^2\, A_x^2.\end{aligned}$$

Omordning af Leddene efter faldende Potenser af p giver efter behørig Reduktion

$$\left.\begin{aligned}\delta^2\, \mu^2 &= p^2\, [{}_n\mathsf{Æ}_x - {}_nÆ_x^2] + \\ &2p\delta\, [{}_n\mathsf{A}_x - (A_x \cdot {}_nÆ_x - v^n\, A_{x,n})] + \delta^2\, [\mathsf{A}_x - A_x^2].\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

1ste og 3die Led paa højre Side have vel den sædvanlige Form, men desuden optræder som Faktor til $2p\delta$ et nyt Led, som ikke synes at tilstede en lignende Reduktion.

Specielt mærkes Tilfældet $n = \infty$, altsaa livsvarig Præmiebetaling, hvorved Formlen gaar over til (3), sumt $n = 0$, som svarer til Indskud engang for alle. Dette Tilfælde, saavel som

$p = 0$ reducerer Formlen til (2), hvilken ogsaa skal benyttes efter Præmiebetalingens Ophør.

Ved Forsikringens Begyndelse er $V = 0, p = \frac{A_x}{{}_n a_x}$, og Formlen (11) kan da skrives

$$\delta^2 \mu^2 = -2p^2 \delta\, {}_n\mathbf{a}_x + 2p\delta\, ({}_n\mathbf{A}_x + v^n A_{x,n}) + \delta^2\, \mathbf{A}_x. \quad (11')$$

Ved lignende Betragtninger, som tidligere ere anvendte ved Afledning af (6), kan man af (11) danne Udtrykket for μ for Livsforsikring med Udbetaling mod kort Præmie og ligeledes for den ophørende Livsforsikring mod Præmie. Vi skulle nøjes med at angive μ^2 for denne sidste for det Tilfælde, da Præmiebetalingen vedvarer i hele Forsikringstiden. Den søgte Formel fremgaar da af (11), naar man antager, at ingen flere Dødsfald indtræffer efter Opnaaelsen af Alderen $x + n$ Aar. Altsaa bliver

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 \mu^2 = p^2 ({}_n\mathbf{Æ}_x - {}_nÆ_x^2) + 2p\delta\, ({}_n\mathbf{A}_x - {}_nA_x \cdot {}_nÆ_x) + \\ \delta^2 ({}_n\mathbf{A}_x - {}_nA_x^2). \end{aligned}\right\} (12)$$

Ved Forsikringens Begyndelse reduceres denne til

$$\delta^2 \mu^2 = (p + \delta)^2\, {}_n\mathbf{A}_x - p^2 (1 - v^{2n}\, q_{x,n}), \quad (12')$$

der ogsaa kan skrives

$$\delta^2 \mu^2 = \frac{1}{{}_n a_x^2} [(1 - E_{x,n})^2\, {}_n\mathbf{A}_x - (1 - \mathbf{E}_{x,n})\, {}_nA_x^2]. \quad (12'')$$

Endelig skal endnu undersøges den opsatte Livrente mod Præmier, som svares, indtil Livrentenydelsen begynder. Livrenten være 1, Præmien p og $V = \bar{a}_{x,n} - p\, {}_n a_x$, hvoraf

$$p + \delta V = p \cdot {}_nÆ_x + \delta a_{x,n} = K.$$

Da er

$$\delta \cdot G_t = p(1 - v^t) + \delta V = -pv^t + K, \ (t < n),$$

$$\delta \cdot G_t = p(1 - v^n) + (v^n - v^t) + \delta V = -(p+1)v^n + v^t + K, \ (t > n).$$

Følgelig er

$$\begin{aligned} \delta^2 \mu^2 = p^2\, {}_n\mathbf{A}_x + (p + 1)^2\, v^{2n}\, q_{x.n} - 2(p + 1)\, v^n A_{x,n} + \\ \mathbf{A}_{x,n} - (p\, {}_nÆ_x + \delta a_{x,n})^2, \end{aligned}$$

eller ordnet efter Potenser af p:

$$\delta^2\mu^2 = p^2\,({}_n\text{Æ}_x - {}_n\text{Æ}_x^2) + 2p\,(v^{2n}\,q_{x,n} - v^n A_{x,n} - \delta a_{x,n}\cdot{}_n\text{Æ}_x)$$
$$+ (v^{2n}\,q_{x,n} - 2v^n A_{x,n} + \mathbf{A}_{x,n} - \delta^2 a_{x,n}).$$

Faktoren til $2p$ i det mellemste Led kan reduceres til

$$v^n\,(q_{x,n} - A_{x,n}) - \delta a_{x,n}\cdot{}_n\text{Æ}_x = \delta a_{x,n}\,(v^n - {}_n\text{Æ}_x).$$

Det sidste Led omskrives til

$$2v^n\delta a_{x,n} - 2\delta\,\mathbf{a}_{x,n} - \delta^2 a_{x,n} = \delta a_{x,n}\,(2v^n - \delta a_{x,n}) - 2\delta\mathbf{a}_{x,n}$$
$$= (v^{2n} - 2\delta\,\mathbf{a}_{x,n}) - (v^n - \delta a_{x,n})^2,$$

og er iøvrigt identisk med $\delta^2\mu^2$, bestemt ved (9). Vi kunne altsaa med en forkortet Betegnelse skrive

$$\mu^2 = Mf^2\,(a_{x,n} - p\cdot{}_n a_x) =$$
$$p^2\,.\,Mf^2\,({}_n a_x) + Mf^2\,(a_{x,n}) - \frac{2p}{\delta}\cdot({}_x\text{Æ}_n - v^n)\,a_{x,n}. \qquad (13)$$

Ved Forsikringens Begyndelse kan Formlen skrives i følgende simplere Skikkelse

$$\mu^2 = \frac{2}{\delta}\,(p^2\,(v^n\,{}_n a_x - {}_n\mathbf{a}_x) + (v^n\,a_{x,n} - \mathbf{a}_{x,n})). \qquad (13')$$

Formlerne (12) og (13) ere for sammensatte, til at de kunne have nogen synderlig praktisk Betydning, de ere her væsentlig kun medtagne for Fuldstændigheds Skyld. Dog bør der lægges Mærke til, at de, som man kunde vente, indeholde Led, der svare til de enkelte Led i Udtrykket for V, betragtede som selvstændige Forsikringer; men desuden indgaar der i dem et nyt Led, som er af en mere sammensat Natur. I Reglen vil dette vistnok blive negativt, saaledes som det altid vil være Tilfældet i Formlen (13), hvor ${}_n\text{Æ}_x - v^n$ altid vil være en positiv Størrelse, og hele det paagjældende Led altsaa have negativt Fortegn.

Formler, hvis Sammensætning er analog med (12) og (13), ville overhovedet altid fremkomme, hvor en og samme Person har tegnet flere forskjellige Forsikringer, som ikke kunne samles til en enkelt, men jeg skal ikke nærmere gaa ind paa dette Punkt.

6. For at kunne drage praktisk Nytte af de udviklede Formler, behøver man først og fremmest foruden de sædvanlige Grundtavler et System af tilsvarende Tabeller over forskjellige Forsikringers Indskudspriser, men beregnede med den dobbelte Rentefod. Da

det imidlertid kun kommer an paa de kontinuerlige Værdier, kan Omfanget af disse nye Tavler gjøres temmelig ringe. Foruden Alderen behøve de nemlig kun at indeholde 3 Kolonner med Værdierne af $\mathbf{D}_x = v^{2x} l_x$, $\mathbf{a}_x$ og $\mathbf{A}_x$, idet alle de andre Størrelser, som behøves, forholdsvis let dannes af disse i Forbindelse med de tilsvarende D_x, a_x, og A_x for den sædvanlige Rentefod.

Konstruktionen af de nye Tavler sker lettest ved først at beregne $log\ \mathbf{D}_x$ for de enkelte Aldersaar og derefter danne Differenserne, som fremstille $-\ log\ .\ v^2\ (1 - q_x)$. Idet man gaar ud fra de højeste Aldere, da Livrenteværdien er 0, beregner man derefter sukcessive de helaarlige forudbetalte Livrenters Værdier ved Formlen

$$\overset{1}{\mathbf{a}}_x = 1 + v^2\,(1 - q_x)\,\overset{1}{\mathbf{a}}_{x+1},$$

og af disse findes atter de kontinuerlige Livrenteværdier ved Formlen

$$\mathbf{a}_x = \overset{1}{\mathbf{a}}_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\varrho_x + 2\delta),$$

hvor ϱ betegner Dødelighedsstyrken. $\mathbf{A}_x$ faas atter heraf ved Ligningen

$$\mathbf{A}_x = 1 - 2\delta\mathbf{a}_x.$$

Selvfølgelig kunde man ogsaa finde $\mathbf{a}$ ved numerisk Integration paa sædvanlig Vis, men den angivne Fremgangsmaade er for saa vidt lettere, som den ikke kræver Beregning af andre Størrelser, end dem, som man har Brug for.

En lille Tavle, som indeholder for hvert 5te Aldersaar Størrelserne $log\ D_x$, a_x, og $log\ A_x$ svarende til Rentefoden δ saavelsom 2δ er nedenfor anført. Den er beregnet paa Grundlag af „Hafnia“s Dødelighedstavler; δ svarer til en Rentefod af 1 pCt. fjerdingaarlig. Alderen x betegner det fyldte Aldersaar.

En saadan Tavle vil i Virkeligheden være tilstrækkelig for næsten alle de Anvendelser, som forekomme i Praxis.

Disse Anvendelser ere af dobbelt Art. For det første kan nemlig Middelusikkerheden μ ved en Forsikrings Begyndelse anvendes som Maal for denne Forsikrings Usikkerhed, navnlig i Sammenligning med andre af samme eller anden Art, og faar derved

x	$\delta = 0{\cdot}0398$			$2\delta = 0{\cdot}0796.$				x
	$log\ D_x$	a_x	$log\ A_x$	$log\ \mathbf{D}_x$	$\mathbf{a}_x$	$log\ \mathbf{A}_x$	$\mathbf{A}_x - A_x^2$	
0	0·0236	19·683	9·3357	0·0150	11·105	9·0646	0·0691	0
5	9·9026	20·272	9·2859	9·8075	11·528	8·9158	0·0451	5
10	9·7993	20·082	9·3027	9·6179	11·584	8·8915	0·0376	10
15	9·7019	19·525	9·3482	9·4341	11·465	8·9417	0·0377	15
20	9·6049	18·808	9·4004	9·2507	11·266	9·0139	0·0401	20
25	9·5056	18·019	9·4516	9·0650	11·033	9·0855	0·0417	25
30	9·4033	17·166	9·5007	8·8763	10·774	9·1537	0·0422	30
35	9·2981	16·211	9·5500	8·6847	10·460	9·2237	0·0415	35
40	9·1902	15·104	9·6008	8·4904	10·052	9·3007	0·0408	40
45	9·0786	13·822	9·6532	8·2924	9·517	9·3846	0·0400	45
50	8·9606	12·382	9·7052	8·0880	8·842	9·4715	0·0390	50
55	8·8312	10·840	9·7548	7·8721	8·039	9·5564	0·0368	55
60	8·6830	9·262	9·8003	7·6376	7·138	9·6353	0·0332	60
65	8·5057	7·717	9·8406	7·3738	6·176	9·7062	0·0285	65
70	8·2841	6·264	9·8754	7·0658	5·198	9·7681	0·0229	70
75	7·9963	4·950	9·9047	6·6916	4·250	9·8207	0·0170	75
80	7·6096	3·810	9·9286	6·2186	3·373	9·8642	0·0117	80
85	7·0755	2·860	9·9475	5·5981	2·601	9·8993	0·0078	85
90	6·3216	2·097	9·9622	4·7578	1·951	9·9267	0·0044	90
95	5·2398	1·506	9·9732	3·5896	1·440	9·9471	0·0014	95

Betydning ved Fastsættelsen af Sikkerheds-Tillægene, som skulle tilføjes til Nettopriserne.

Exempelvis anføres i efterfølgende Oversigt Værdierne af μ, svarende til livsvarige Livrenter samt livsvarige Livsforsikringer mod Indskud eller Præmier for Aldersklasserne 30, 50 og 70. For de sidstes Vedkommende er Forsikringssummen 100, de tilsvarende Indskud og Præmier betegnes ved henholdsvis J og P, og $\mu' = 100\,\mu$.

Alder.	Livsvarig Livrente.		Livsvarig Livsforsikring mod					
			Indskud.			Præmie.		
x	a_x	μ	J	μ'	$\mu' : J$	P	μ'	$\mu' : J$
30	17·17	5·16	31·7	20·5	0·65	1·84	30·1	0·95
50	12·38	4·96	50·7	19·8	0·39	4·10	40·1	0·79
70	6·26	3·80	75·1	15·1	0·20	11·98	60·7	0·81

Det ligger udenfor Planen for denne Afhandling at gaa nøjere ind paa Spørgsmaalet om en rationel Fastsættelse af Sikkerheds-

tillæggene, ved hvis Behandling der ogsaa maatte tages Hensyn til andre Momenter end de her nævnte. Og selv om man vilde indskrænke sig til denne Side af Sagen, burde dog ogsaa de Indtrædendes Fordeling paa de forskjellige Aldersklasser, og de forskjellige Forsikringers relative Hyppighed tages med i Betragtning. Jeg skal derfor ikke opholde mig videre ved dette Punkt.

Derimod skal jeg udførligere omtale den anden Hovedanvendelse af den udviklede Theori, nemlig Bestemmelsen af Middelusikkerheden paa hele Massen af en Anstalts løbende Forsikringer, saa meget mere som ingen af de tidligere Forfattere, saavidt mig bekjendt, særlig har haft denne Anvendelse for Øje.

Det vil erindres, at alle de fundne Formler fremstille Middelusikkerheden paa et hvilket som helst Stadium af Forsikringens Løbetid, endvidere at de gjælde for en enkelt Person og for en Forsikringssum 1. For en Forsikringssum lig S blive de respektive Udtryk for μ^2 at multiplicere med S^2, og ligeledes maa erindres, at naar en og samme Person har flere Forsikringer, saa blive disse at sammendrage til en enkelt. Naar Forsikringerne ere uensartede, maa der foretages en speciel Beregning af μ for den sammensatte Forsikring. Derved vil man for det meste faa et meget kompliceret Udtryk, men man kan sædvanlig nøjes med at erstatte Forsikringen ved en simplere, naar man blot passer, at det tilsvarende μ bliver større end for hin.

Det vil endvidere bemærkes, at μ^2 stedse fremtræder under den typiske Form

$$\mu^2 = \alpha \,.\, p^2 + \beta \,.\, p\delta + \gamma \,.\, \delta^2,$$

For Forsikringssummen S bliver Præmien $P = pS$, og altsaa faas for den paagjældende Forsikring Middelusikkerhedens Kvadrat

$$m^2 = \mu^2 S^2 = \alpha P^2 + \beta P\delta S + \gamma\delta^2 S^2.$$

Har man altsaa en Gruppe af ensartede Forsikringer, for hvilke Faktorerne α, β, γ ere de samme, saa bliver for hele denne Gruppe

$$\Sigma m^2 = \alpha \,.\, \Sigma P^2 + \beta\delta \,.\, \Sigma PS + \gamma\delta^2 \,.\, \Sigma S^2.$$

Man har altsaa blot at danne de paagjældende Summer og bagefter at multiplicere disse med α, $\beta\delta$, $\gamma\delta^2$ ganske paa lignende Maade,

som man ved Beregningen af den fornødne Formue danner Summerne ΣP og ΣS og bagefter multiplicerer med passende Faktorer.

Hvorledes saadanne Grupper skulle dannes, fremgaar af sig selv. Først har man at udskille hver Forsikringsart for sig, og derefter indenfor denne sammenfatte Forsikringerne for hver enkelt Aldersklasse i en Gruppe, ganske som ved Beregningen af Præmiereserven. Af de for hver enkelt Gruppe fundne Værdier for Σm^2 faas endelig den totale Sum M^2 ved Addition.

Paa denne Maade kan hele Regningen uden betydelig Vanskelighed gjennemføres, kun maa man have Opmærksomheden henvendt paa de specielle Tilfælde, da en Person har flere Forsikringer, hvilke man gjør bedst i forud at udskille af hele Massen.

Imidlertid kan man, da det ikke drejer sig om stor Nøjagtighed, tillade sig meget betydelige Afkortninger i Regningen. Til Exempel ville vi betragte livsvarig Livsforsikring mod livsvarig Præmie. Her er

$$\mu^2 = \left(\frac{p+\delta}{\delta}\right)^2 (\mathsf{A}_x - A_x^2),$$

eller for en Forsikringssum S, idet $\delta \,.\, S$ sættes lig R,

$$\delta^2 \,.\, m^2 = (P + R)^2 \, (\mathsf{A}_x - A_x^2).$$

Man har altsaa først for hver enkelt Forsikring at danne Størrelsen $(P + R)^2$, altsaa $\Sigma (P + R)^2$ for hver Aldersklasse. Det er her imidlertid unødvendigt at gaa til etaarige Klasser, man kan fuldstændig nøjes med 5-aarige, da Faktoren $\mathsf{A}_x - A_x^2$, særlig i de Aldersklasser, som levere det største Bidrag til Forsikringsmassen, kun varierer meget lidt.

Ja man kan endnu foretage yderligere Forkortelser. Da nemlig $\mathsf{A}_x - A_x^2$ for alle Aldere fra 25 til 50 Aar kun afviger lidet fra 0·04 og for højere Aldere vel aftager noget, dog ikke mere, end at denne Størrelse ved Alderen 65 Aar endnu er 0·0285, saa vil man aabenhart faa et Resultat, der er noget, men ikke meget for stort, ved for $\mathsf{A}_x - A_x^2$ overalt at benytte Værdien 0·04, og Regningen reduceres da til at danne Summen $\Sigma\,(P + R)^2$. For de store Forsikringers Vedkommende bør denne beregnes nøjagtig, derimod kan man for de mindre nøjes med en Middel-

værdi. Da P er den Præmie, som svarer til Indtrædelsesalderen, som for de allerfleste Forsikringers Vedkommende gjennemsnitlig ligger mellem 30 og 40 Aar, bliver $\frac{p+\delta}{\delta}$ noget nær $= \frac{3}{2}$ og $\mu = \frac{(p+\delta)}{\delta} \sqrt{(\mathbf{A}_x - A_x^2)}$ omtrentlig 0·3.

For Simpelheds Skyld sættes $\mu^2 = \frac{1}{10}$, og multipliceres altsaa Forsikringssummernes Kvadratsum med denne Størrelse, faas tilnærmelsesvis M^2 for hele den paagjældende Forsikringsklasse.

Har man f. Ex. en Forsikringsbestand af

50	Forsikringer	à 20 000	Kr.,	ialt	1 000 000 Kr.
600	—	10 000	—,	—	6 000 000 —
3000	—	5 000	—,	—	15 000 000 —
5000	—	2 000	—,	—	10 000 000 —
ialt 8650	—	à gjsn. 3 700	—,	—	32 000 000 Kr.,

saa faas herefter tilnærmelsesvis

$$M^2 = \frac{1}{10} \cdot 1000^2 \, (50 \,.\, 20^2 + 600 \,.\, 10^2 + 3000 \,.\, 5^2 + 5000 \,.\, 2^2)$$

eller $$M^2 = 17\,500 \text{ Mill. Kr.},$$

altsaa $$M = 132000 \text{ Kr.}$$

En Forestilling om den mulige Fejl paa dette Resultat faas ved at tænke sig, at alle Forsikringer ere nye, indtrædende ved en og samme Alder. Er denne over Gjennemsnittet af de Forsikredes nuværende Alder, saa maa der faas en for stor Værdi af M ved at beregne denne som svarende til lutter nye Forsikringer. Man faar, at Indtrædelsesalderen

25 Aar giver M = 119 000 Kr.
35 — — — = 132 000 —
45 — — — = 152 000 —
55 — — — = 186 000 —

Den fundne Værdi af M vil derfor i de fleste Tilfælde være en god Tilnærmelse til det nøjagtige Resultat, navnlig hvis, som forudsat, Indtrædelsesalderen for de store Forsikringer ikke er meget over 40 Aar.

Lige saa let beregner man Middelusikkerheden for Livsforsikringer mod Indskud, derimod fordre de, som ere tegnede mod kortvarig Præmie, en noget vidtløftigere Regning. Dog kan man ogsaa for disse temmelig let finde Grænser for μ, som tilstede med nogenlunde Nøjagtighed at bedømme den omtrentlige Størrelse af Σm^2. Det er nemlig a priori indlysende og ikke vanskeligt at godtgjøre ved numerisk Beregning, at man for en saadan Forsikring maa have

$$\mathbf{A}_x - A_x^2 < \mu^2 < \left(\frac{p+\delta}{\delta}\right)^2 (\mathbf{A}_x - A_x^2).$$

Man kan altsaa sætte $\mu^2 = k^2 (\mathbf{A}_x - A_x^2)$, hvor Konstanten k sædvanlig vil være indesluttet mellem Grænserne 1 og 2. Sætter man altsaa $k = 1{\cdot}5$, faar man et Resultat, som strax giver nogen Oplysning, og ved at gjennemføre Beregningen for nogle faa typiske Tilfælde, vil man let faa en tilstrækkelig god Bestemmelse.

Paa lignende Maade kunne de fleste andre Forsikringsarter behandles, og naar man vil gjøre sig den Umage, blot en enkelt Gang at foretage en nogenlunde nøjagtig Beregning af Middelusikkerheden for en bestemt Anstalts Vedkommende, vinder man hurtig den tilstrækkelige Erfaring for at kunne bedømme Indflydelsen af at afkorte Regningen paa forskjellige Punkter. Naar man kun iagttager at udskille de store Forsikringer og dem, hvis Vilkaar overhovedet adskille dem i mærkelig Grad fra den store Masse, saa vil man erfare, at en brugbar Tilnærmelse til den rigtige Værdi af Σm^2 meget hurtig kan faas for de andres Vedkommende. Det hele Arbejde, som er forbunden med Beregningen af Middelusikkerheden paa Præmiereserven, bliver derfor langt fra saa stort, som det fra først af kunde synes, og enhver Livsforsikringsmathematiker bør derfor ikke forsømme med passende større Mellemrum at foretage en saadan Beregning for sit Selskab. Han erholder derved en Maalestok for Bedømmelsen af de tilfældige Slingringer i den indtrufne Dødelighed og et Middel til at danne sig et Skjøn over, hvilken Extrareserve Anstalten behøver for at dække sig imod disse, som vanskelig kan faas paa anden Maade. Som allerede omtalt, kunne forskjellige Anskuelser gjøres gjældede

om dennes absolute Størrelse, men naar først et Maal for Usikkerheden er fundet, saa er man dog naaet et godt Skridt fremad, og naar det saa erindres, at en Afvigelse fra det normale saa stor som Middelfejlen endnu har en ret betydelig Sandsynlighed for sig, medens en Afvigelse i en bestemt Retning af 2 à 3 Gange Middelfejlen kun er lidet rimelig, saa vil et Skjøn over Extrareservens nødvendige Størrelse dog forholdsvis let kunne faas paa den her antydede Maade.

Men det maa ikke glemmes, at den saaledes bestemte Extrareserve kun dækker for en Art af de Tilfældigheder, som en Anstalt kan være udsat for, og at der ogsaa bør haves Midler til at imødegaa saadanne Tab som Nedgang i Rentefod eller vedvarende Stigning i Dødeligheden kan medføre.

EXAMENSOPGAVER.

Opgaver ved Skoleembedsexamen i Fysik. 1888.

Mathematik (tillige for Magisterkonferens i Fysik).

Find x og y udtrykte som Funktioner af t, naar

$$\frac{dx}{dt} + 3x - y = \cos 2t,$$

$$\frac{dy}{dt} + x + y = 0.$$

Opl. Ved d'Alemberts Fremgangsmaade finder man

$$u = x + \vartheta y,$$

$$\frac{du}{dt} + (3 + \vartheta)\, u = \cos 2t,$$

idet ϑ er et partikulært Integral i

$$\frac{d\vartheta}{dt} + (3 + \vartheta)\,\vartheta + 1 - \vartheta = 0.$$

Saadanne ere $\vartheta = -1$ og $\vartheta = -1 + \frac{1}{t}$.

Den første giver

$$x - y = n = e^{-2t}\left(\int e^{2t} \cos 2t \, dt + c_1\right) \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 2t + \sin 2t) + c_1 e^{-2t}.$$

Den anden, $\vartheta = -1 + \frac{1}{t}$, giver

$$x - y + \frac{y}{t} = u = \frac{e^{-2t}}{t}\left(\int e^{2t} . t \cos 2t \, dt + c_2\right).$$

Det heri indeholdte Integral integreres delvis som

$$\int e^{2t} \cos 2t \, dt \, . \, t = t \, e^{2t} \frac{\cos 2t + \sin 2t}{4} - \int e^{2t} \frac{\cos 2t + \sin 2t}{4} dt$$

$$= t \, e^{2t} \frac{\cos 2t + \sin 2t}{4} - e^{2t} \frac{\cos 2t + \sin 2t}{16} - e^{2t} \frac{\sin 2t - \cos 2t}{16}$$

$$= e^{2t}\left[\frac{1}{4} t (\cos 2t + \sin 2t) - \frac{1}{8} \sin 2t\right].$$

Altsaa

$$x - y + \frac{y}{t} = \frac{1}{4}(\cos 2t + \sin 2t) - \frac{\sin 2t}{8t} + c_2 \frac{e^{-2t}}{t}. \qquad (2)$$

Ligningerne (1) og (2) kunne dernæst løses med Hensyn til x og y.

Opgaven løses ogsaa let ved Differentiation og Elimination af x og dens Differentialkoefficient eller y og dens Differentialkoefficient.

Mekanik (tillige for Magisterkonferens i Fysik).

En tung og homogen, ret, cirkulær og fuldstændig glat Cylinder hviler ved Begyndelsen af den Bevægelse, som her skal undersøges, paa en vandret og fuldstændig glat Plan. En tung og homogen Stang, hvis Længde er lig Cylinderens Højde, medens dens Tykkelse er ringe nok til at lades ude af Betragtning, og hvis Masse er lig Cylinderens, anbringes i fast Forbindelse med Cylinderen langs en Frembringer.

Hvilken Bane vil Stangen da gjennemløbe?

Hvorledes kan den levende Krafts Princip benyttes til nærmere Bestemmelse af Bevægelsen?

Naar Stangens Begyndelsesstilling ligger i samme vandrette

Plan som Cylinderens Axe, spørges endelig, hvilken Stilling Cylinderen vil indtage i det Øjeblik, da den lodrette Komposant af Stangens Hastighed er størst.

Opl. 1) Det er tilstrækkeligt at betragte et plant Snit vinkelret paa Cylinderens Frembringer, og altsaa i Stedet for om Cylinder, Plan og Stang at tale om en Cirkel, hvis Radius vi ville kalde a, Massen m, om en fast vandret Linie, hvorpaa Cirklen bevæger sig, og om en Partikel med Massen m.

Det sammensatte Systems Tyngdepunkt, der befinder sig i Midtpunktet af Radius til Partiklen, maa bevæge sig paa en lodret Linie. Tages denne til Ordinataxe (regnet positiv ned ad, den vandrette Linie gjennem Cirklens Centrum til Abscisseaxe, og betegner ϑ den nævnte Radies Vinkel mod Ordinataxen, faar Partiklen Koordinaterne

$$x = \frac{a}{2} \sin \vartheta, \quad y = a \cos \vartheta.$$

Banen bliver altsaa Ellipsen

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

hvilket ogsaa følger af en bekjendt kinematisk Sætning.

2) Idet Cirklens Midtpunkt har Abscissen $-\frac{a}{2} \sin \vartheta$, og den roterer om dette med Hastigheden $\frac{d\vartheta}{dt}$, giver den levende Krafts Princip, naar Begyndelsesværdien af ϑ kaldes α,

$$m \frac{a^2}{4} \cos^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m a^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + m a^2 \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{4} + \sin^2 \vartheta\right)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$
$$= 2 m g a (\cos \vartheta - \cos \alpha).$$

Leddene paa venstre Side hidrøre 1) fra Bevægelsen af Cirklen betragtet som reduceret til Tyngdepunktet, 2) fra Rotationen om dette, 3) fra Partiklens Bevægelse.

Af denne Ligning finder man

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{4g(\cos \vartheta - \cos \alpha)}{a(3 - \cos^2 \vartheta)},$$

hvorved $\frac{d\vartheta}{dt}$, og dermed alle Punkters Hastigheder, vil være bestemt

for enhver Stilling, som Cylinderen kan indtage. Idet $\frac{dt}{d\vartheta}$ bliver en Funktion af ϑ, vil den fuldstændige Bestemmelse af Bevægelsen være reduceret til Kvadratur.

Kvadratet paa den lodrette Komposant af Partiklens Hastighed vil, naar $\alpha = \frac{\pi}{2}$, være bestemt ved

$$a^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{4\,a\,g \cos \vartheta}{3 - \cos^2 \vartheta}(1 - \cos^2 \vartheta).$$

Denne Størrelse er Nul for $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$ og for $\vartheta = 0$ (Stillingen $\vartheta = \pi$ naas ifølge Forudsætningerne ikke). Ved sædvanlig Bestemmelse finder man endvidere, at den kun kan blive et Maximum eller Minimum for

$$\cos \vartheta = \sqrt{4 - \sqrt{13}},$$

idet de øvrige Fortegn ikke give Værdier, som $\cos \vartheta$ kan faa. Den fundne Værdi maa svare til Maximum, da de derved bestemte Hastighedskomposanter ligge imellem de nys nævnte Minima.

Astronomi.

For et Himmellegeme, som bevæger sig omkring Solen, kjendes tre heliocentriske Steder, givne ved Afstand og Længde i Banen, nemlig

$$r_1 = 1{\cdot}0603, \quad u_1 = 162^0\ 24'\ 18'',$$
$$r_2 = 1{\cdot}11705, \quad u_2 = 227^0\ 46'\ 30'',$$
$$r_3 = 1{\cdot}88155, \quad u_3 = 276^0\ 23'\ 30''.$$

Heraf skal (ved femcifret Regning) beregnes Periheliets Længde og Afstand fra Solen, samt Banens Excentricitet.

Gives der Tilfælde, da de nævnte Elementer ikke kunne bestemmes af tre heliocentriske Steder?

Opl. Banens Ligning i polære Koordinater være

$$r = \frac{p}{1 + e \cos (u - u_0)}.$$

Denne kan ogsaa skrives

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e \cos u_0}{p} \cos u + \frac{e \sin u_0}{p} \sin u,$$

saa at man faar tre lineære Ligninger til Bestemmelse af

$$\frac{1}{p},\ \alpha = \frac{e}{p} \cos u_0 \text{ og } \beta = \frac{e}{p} \sin u_0,$$

nemlig

$$0{\cdot}94311 = \frac{1}{p} - 0{\cdot}95322\,\alpha + 0{\cdot}302285\,\beta,$$

$$0{\cdot}89522 = \frac{1}{p} - 0{\cdot}67205\,\alpha - 0{\cdot}74051\,\beta,$$

$$0{\cdot}53148 = \frac{1}{p} + 0{\cdot}111325\,\alpha - 0{\cdot}993775\,\beta.$$

Subtraktion giver

$$-0{\cdot}04789 = 0{\cdot}28117\,\alpha - 1{\cdot}042795\,\beta,$$

$$-0{\cdot}36374 = 0{\cdot}78337\,\alpha - 0{\cdot}253265\,\beta.$$

Heraf faas

$$\log \frac{e \cos u_0}{p} = {}_n 9{\cdot}69232,$$

$$\log \frac{e \sin u_0}{p} = {}_n 8{\cdot}93874,$$

altsaa

$$u_0 = 190^0\ 0'\ 8{\cdot}5'',$$

$$\log \frac{e}{p} = 9{\cdot}69897 = \log 0{\cdot}5.$$

og da de 3 givne Ligninger overensstemmende give $p = 2$, maa man have $e = 1$.

Banen er altsaa parabolsk med Periheliet beliggende i Afstanden 2 og i den Retning, som bestemmes ved den fundne Værdi af u_0.

Opgaven er altid bestemt, naar de tre Observationer angaa virkelig forskjellige Steder.

LØSNING AF OPGAVE 556, 558 OG 560.

556. Hvorledes indses uden direkte Sammentælling i Tavlerne, at:

$$(\log 1.01 + \log 1.02 + \log 1.03 + \ldots\ldots + \log 10.00)$$
$$+ (10^{0.01} + 10^{0.02} + 10^{0.03} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 10^{1.00}) = 1000.01,$$

naar man saavel i Logarithmer som i Antilogarithmer kun medtager de to første Decimaler (uden Forhøjelse af 2den Decimal, hvor næste Ciffer er 5 eller derover)?

(J. P. Gram).

I den første Række ere alle Leddene, fra det tredie af, lig Exponenterne i den anden. Antages nu a_n af de paa hinanden følgende Led paa Grund af Bortkastning af Decimaler at være lige store, lig $0.01\,n$, altsaa:

$$log\,(p - 0.01) = 0.01\,(n - 1),$$
$$log\,p = 0.01\,n,\; log\,(p + 0.01) = 0.01\,n, \ldots$$
$$log\,(p + 0.01\,a_n - 0.01) = 0.01\,n,$$
$$log\,(p + 0.01\,a_n) = 0.01\,(n + 1),$$

saa maa, ligeledes paa Grund af Bortkastning af Decimaler, $10^{0.01\,n}$ være lig $p - 0.01$ og $10^{0.01\,(n+1)}$ være lig $p + 0.01\,a_n - 0.01$, forudsat at det ikke er exakt, naar man sætter $log\,p = 0.01\,n$ eller $log\,(p + 0.01\,a_n) = 0.01\,(n + 1)$. Da det sidste imidlertid kun kan gjælde, naar $0.01\,n$ eller $0.01\,(n + 1)$ er hel, eftersom brudne Potenser af 10 ere irrationale, vil en Undtagelse først indtræde for $n = 99$.

Følgelig er Differensen imellem to paa hinanden følgende Led i den anden Række lig 0.01 Gange Antallet af lige store Led i den første — kun undtagen Differensen imellem de to sidste Led, der er $0.01\,a_{99} + 0.01$ —, eller man har:

$$10^{0.01} = 1.02$$
$$10^{0.02} = 1.02 + 0.01\,a_1$$
$$10^{0.03} = 1.02 + 0.01\,a_1 + 0.01\,a_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$10^{1.00} = 1.02 + 0.01\,a_1 + 0.01\,a_2 + \ldots\ldots + 0.01\,a_{99} + 0.01$$

$$\sum_0^{100} 10^{0.01\,(n+1)} = 100\,.\,1.02 + 0.99\,a_1 + 0.98\,a_2 + \ldots + 0.01\,a_{99} + 0.01.$$

Men den første Række, hvis to første Led ere lig 0.00, er:

$$\sum_0^{100} 0.01\,(n + 1)\,a_{n+1} = 0.01\,a_1 + 0.02\,a_2 + \ldots + 0.99\,a_{99} + 1.00\,a_{100},$$

og altsaa faas ved Summation af de to Udtryk:

$$\sum_0^{100} 0.01\,(n+1)\,a_{n+1} + \sum_0^{100} 10^{0.01(n+1)} = 102 + \sum_0^{100} a_{n+1} + 0.01.$$

Summen af a'erne maa imidlertid være lig det samlede Antal af Led i den første Række minus 2 (de to første Led), altsaa: $\Sigma a_{n+1} = 898$, ved hvis Indsættelse i ovenstaaende Ligning Sætningen er bevist.

Til Sammenligning søges endnu Summen af de to Rækker, idet alle Decimaler medtages i Logarithmer og Antilogarithmer.

Hertil benyttes for den første Rækkes Vedkommende den bekjendte Summationsformel:

$$\Sigma l.(x+1) = \frac{1}{2} l.2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right) l.x - x + \frac{B_1}{1.2x} + \frac{B_3}{3.4x^3} + \ldots,$$

hvor B_1, B_3 ... ere de Bernoulli'ske Tal. Rækken kan nemlig skrives som: $log\, e \sum_{100}^{1000} l\,(x+1) - 2.900$, der ved Hjælp af Formlen — idet tilstrækkelig smaa Led af denne bortkastes — findes lig 609.635.

Den anden Række derimod summeres som en almindelig Kvotientrække og bliver lig $\frac{9}{1 - 10^{-0.01}}$, der udregnet er: 395.431.

Tilsammen findes de to Rækker altsaa at udgjøre: 1005.066, saa at Summen af de i den stillede Opgave bortkastede Decimaler beløber sig til: 5.056.

(P. Vedel).

558[*]). *ABCD* være en indskreven Firkant. Den vinkelrette paa Midten af *AC* skjærer *CD* i *E* og *AD* i *F*. Bevis, at den rette Linie, der halverer $\angle ABC$, ogsaa vil halvere $\angle EBF$.

(A. S. Bang).

Lad Firkantens omskrevne Cirkel skjæres af den vinkelrette paa Midten af *AC* i *G* og *J* samt af *CF* i *H*. *D* og *H* ere symmetriske Punkter med Hensyn til *FE*, følgelig er $\smile HG = \smile GD$, saa at $\angle FCE$ halveres af *CG*, dens Nabovinkel af *JC*, idet $\angle JCG = 90^0$; Punkterne *J* og *G* dele altsaa Linien *FE* har-

[1]) Ogsaa løst af Jens Møller og Aage Wiuff Petersen.

monisk. Da nu B ligger paa Cirklen over JG som Diameter, halverer $BG \angle FBE$, ligesom den ogsaa halverer $\angle ABC$.

(Ingvard Åsted).

560. Find Summen af Rækken

$$\frac{1}{(-3)(-1).1.3} - \frac{2x^2}{(-1).1.3.5} + \frac{2x^4}{1.3.5.7} - \frac{2x^6}{3.5.7.9} \dots,$$

hvis almindelige Led er (for $n > 0$)

$$(-1)^n \frac{2x^{2n}}{(4n^2-1)(4n^2-9)}.$$

Kalder man den søgte Sum y, har man

$$y = \frac{1}{(-3)(-1).1.3} - \frac{2x^2}{(-1).1.3.5} + \frac{2x^4}{1.3.5.7} \dots$$

Man trækker første Led over paa venstre Side, multiplicerer overalt med x^3 og har da

$$x^3\left(y - \frac{1}{9}\right) = z = - \frac{2x^5}{(-1).1.3.5} + \frac{2x^7}{1.3.5.7} \dots$$

Ved Differentiation paa begge Sider med Hensyn til x faas

$$z' = - \frac{2x^4}{(-1).1.3} + \frac{2x^6}{1.3.5} \dots$$

Sættes $\frac{z'}{x} = u$, faar man paa samme Maade

$$u' = - \frac{2x^2}{(-1).1} + \frac{2x^4}{1.3} \dots$$

Ligeledes $\frac{u'}{x} = v$, og

$$v' = 2 + \frac{2x}{1} - \frac{2x^3}{3} + \dots$$

Heraf

$$\frac{\frac{v'}{2} - 1}{x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots = arctg\, x$$

$$v' = 2x\, arctg\, x + 2.$$

For nu at faa Rækkens Sum (y), gaar man baglæns. (Man kan overalt se bort fra Integrationskonstanten, da det konstante Led stadig er trukket over i den nye ubekendte).

Man har nu

$$v = 2\int x\, arctg\, x\, dx + 2x.$$

De tre Integrationer, der ere at udføre i Regningens Løb, høre alle ind under Formen

$$\int x^{2n-1} \, arctg \, x \, dx.$$

Integralet faas let ved delvis Integration (man maa dog passe godt paa Tegnene) og giver

$\int x^{2n-1} \, arctg \, x \, dx =$

$$\frac{1}{2n}\left[x^{2n} \, arctg \, x - (-1)^n arctg \, x - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n-3}}{2n-3} \dots + (-1)^n x\right],$$

I Opgaven benyttes $n = 1, 2, 3$.

Vi faa nu

$$v = x^2 \, arctg \, x + arctg \, x + x,$$

$$u' = vx = x^3 \, arctg \, x + x \, arctg \, x + x^2,$$

$$u = \frac{1}{4} x^4 \, arctg \, x + \frac{1}{2} x^2 \, arctg \, x + \frac{1}{4} arctg \, x + \frac{x^3}{4} - \frac{x}{4},$$

$$4z' = x^5 \, arctg \, x + 2x^3 \, arctg \, x + x \, arctg \, x + x^4 - x^2,$$

$$4z = \frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 \, arctg \, x + \frac{x^5}{6} - \frac{8x^3}{18} - \frac{x}{6},$$

$$y = \frac{z}{x^3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{24}\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 arctg \, x + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{24 \, x^2}.$$

Rækken er konvergent for $x \leqq 1$.

(Aage Wiuff-Petersen).

OPGAVE TIL LØSNING.

517. Haves tre Keglesnit i et Bundt og drages fra et løbende Punkt i det ene en Tangent til hvert af de andre, vil Forbindelseslinien mellem Berøringspunkterne indhylles af et nyt Keglesnit.

Det er ligegyldigt, hvilken Tangent der benyttes; drages nemlig fra et vilkaarligt Punkt i Planen Tangenterne til to Keglesnit i samme Plan, ville disses fire fælles Tangenter og de fire Forbindelseslinier mellem et Berøringspunkt med det ene og med det andet Keglesnit være otte Tangenter til samme nye Keglesnit.

(C. Juel).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von	Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen.

FEMTE RÆKKE.

Sjette Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

Hoffensberg & Trap's Etabl. — Kjøbenhavn.

1888.

FEMTE HEFTE.

Tidsskrift for Mathematik udgaar paa **E. Jespersens** Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Artikler og andre Bidrag bedes indsendte til Dr. J. P. Gram, Alhambravej 6, Kjøbenhavn, V.

FORELÆSNING OVER HYDROSTATIK.

(Af H. G. Zeuthen).

I. Flydende Legemers Ligevægt.

1. Indledning. I Hydrostatiken undersøges flydende Legemers Ligevægt. I nærværende mathematiske Behandling nøjes vi med at betragte fuldkommen flydende Legemer, hvilke vi tillægge den Egenskab, at deres Partikler frit og uden Gnidningsmodstand kunne forskydes hen ad hverandre og hen ad glatte Overflader i alle Retninger.

Det flydende Legemes Tryk paa en glat Overflade maa i ethvert Punkt være rettet efter dennes Normal.

Et flydende Legemes Ligevægt kan, hvis den er tilstede, ikke forstyrres derved, at man indskrænker Forskydeligheden ved imellem Dele af Legemet at indskyde en fast glat Flade. Derved indses, at, hvorledes Legemet end tænkes delt ved Flader, maa de forskjellige Dele i hvert Punkt af en saadan Flade udøve lige store og modsatte Tryk efter Fladens Normal. Der udøves altsaa gjensidige Tryk i alle Retninger.

2. Tryk paa Fladeenheden. For at bestemme disse Tryks Størrelser betragte vi først Trykket T paa en endelig plan Flade med Areal A. Vi kalde da $\frac{T}{A}$ Trykket paa Fladeenheden. Er dette det samme, naar Fladen ombyttes med en hvilken som helst af sine Dele kaldes Trykket ensformigt, ellers uensformigt. Trykket paa Fladeenhed vil dog have en bestemt Værdi i hvert Punkt, hvor blot $\frac{T}{A}$ nærmer sig til en bestemt Grænse, naar A's Omkreds nærmer sig til kun at omfatte Punktet: det bliver da Grænseværdien af $\frac{T}{A}$. Trykket paa Fladeenhed i et vilkaarligt Punkt af en krum Flade bestemmes i Overensstemmelse hermed som Grænseværdien for $\frac{T}{A}$, idet A er et Areal,

ue

kongruente

F med en fælles

idede Prisme $BFDCGE$

en Del af det flydende Legeme,

holdes i Ligevægt af de ydre

samt de øvrige Deles Tryk paa

dets Overflade.

Lad X være de ydre Kræfters Kompo-

i Retning af Kanterne EG og DF.

denne Retning af Trykkene paa CEG, BFD og

Ere T og T' Trykkene paa de to Rektangler

og a Vinklen mellem det første Normal og EG, haves

$$X - T - T' \cos a = 0$$

med Arealet A af Rektanglerne

$$\frac{X}{A} - \frac{T}{A} - \frac{T'}{A} \cos a = 0.$$

man Prismet snævre ind til Nul, medens det vedbliver

samme Form, bliver efter Forudsætningerne X uendelig

samme Orden som BC^3, men A som BC^2, altsaa

og tilsidst $\frac{T}{A}$ ... $\frac{T'}{A}$.

Tidsskrift for M

Forlag med et Hefte p

af 6 Kroner for Aar

skription modtages

Artikler og

Alhambravej 6

... Stikkelse føres ved

r og luftformige Legemer. Vi ville kalde
hed i et vilkaarligt Punkt p, Tætheden i
ɪsker vil en Forøgelse af p ikke udøve
Varmen en noget større. For luft-
saafremt disse forøvrigt forblive

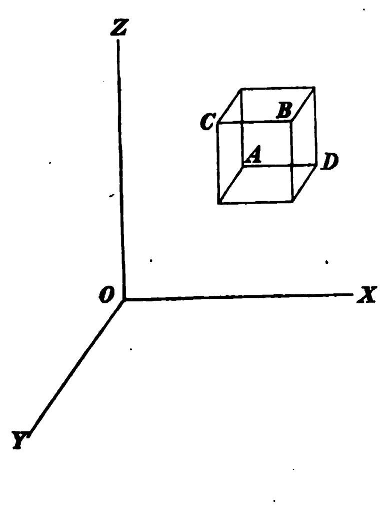
$\frac{\varrho_0}{-}$,

den ved ϱ og p og

.:vægt kan man i alle Til-
.ıoner af Koordinaterne, idet de
Punkt af Legemet. Variationerne af
.riationerne af p og af Varmegraden ogsaa
,estanddele i og for sig kunne være af forskjellig

. Almindelige Ligevægtsbetingelser. Vi skulle nu
ge at opstille almindelige Ligevægtsbetingelser for et flydende Legeme, som er underkastet givne Kræfter. Vi kunne antage, at disse ere bestemte saaledes, at Partiklen dm med de retvinklede Koordinater x, y og z paavirkes af en Kraft, hvis Komposanter efter Axerne ere Xdm, Ydm, Zdm. Vi kunne tænke os Legemets Deling i Partikler foretagen ved Planer parallele med Koordinatplanerne og antage, at Partiklen dm er den, der til modsatte Hjørnespidser har Punktet A med Koordinaterne x, y, z og Punktet B med Koordinaterne $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Man har da $dm = \varrho\, dx\, dy\, dz$. Ved p ville vi betegne Trykket paa Enhed af Overflade i Punktet A. Paa Grund af Partiklens uendelig

Fig. 2.



lille Udstrækning vil Trykket paa Enhed af Overflade ikke faa nogen endelig Afvigelse fra p i noget Punkt af den med yz-Planen parallele Sideflade AC i Parallelepipedet. Naar vi derfor kalde det hele Tryk paa denne Flade, hvis Areal er $dy\,dz$, $p_x\,dy\,dz$, vil p_x afvige uendelig lidt fra p. Idet den modstaaende Sideflade DB er dannet af AC ved at ombytte x med $x + dx$, bliver dette Tryk, som stræber at bevæge Partiklen i x-Axens negative Retning, og som vi derfor give negativt Fortegn,

$$-\left(p_x + \frac{dp_x}{dx}\,dx\right) dy\,dz.$$

Idet alle andre Tryk paa Partiklens Sideflader ere vinkelrette paa x-Axen, faa vi ved at sætte Summen af Kraftens og Nabodelenes Tryks Komposanter efter X-Axen lige stor med Nul, som første Ligevægtsbetingelse for Partiklen dm

$$X\varrho\,dx\,dy\,dz + p_x\,dy\,dz - \left(p_x + \frac{dp_x}{dx}\,dx\right) dy\,dz = 0$$

eller

$$\frac{dp_x}{dx} = \varrho X.$$

Da nu p ikke betegner andet end Grænseværdien for p_x, naar dm virkelig har en uendelig lille Udstrækning, faar man

$$\frac{dp}{dx} = \varrho X \text{ og paa samme Maade } \frac{dp}{dy} = \varrho\,Y,\ \frac{dp}{dz} = \varrho Z, \tag{1}$$

eller

$$p = \int \varrho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{2}$$

Denne Ligning kan dog kun give den til hvert Punkt (x, y, z) svarende Værdi af p eller p som Funktion af de indbyrdes uafhængige variable x, y, z, naar Integralet er exakt, eller naar

$$\frac{d\,(\varrho Y)}{dz} = \frac{d\,(\varrho Z)}{dy},\ \frac{d\,(\varrho Z)}{dx} = \frac{d\,(\varrho X)}{dz},\ \frac{d\,(\varrho X)}{dy} = \frac{d\,(\varrho Y)}{dx}. \tag{3}$$

Disse 3 Ligninger blive saaledes de Ligevægtsbetingelser, som selve Kræfterne maa tilfredsstille. Først derefter lader Trykket paa Enhed af Overflade sig bestemme i ethvert Punkt.

De fundne Ligevægtsbetingelser ere ikke blot nødvendige, men ogsaa tilstrækkelige; thi naar end ikke den mindste Partikel af den

i Udviklingen benyttede Form kan forskydes i nogen Retning, foregaar der aldeles ingen Bevægelse i Fluidet.

Anmærkning. Udviklingen ligner meget den, som anvendes ved bøjelige Snore, og som i Statiken førte til Formlen

$$dT + \varrho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0,$$

(40) i Jul. Petersens Statik. Trykket paa Enhed af Overflade maa langs en vilkaarlig Kurve indenfor det flydende Legeme variere ganske paa samme Maade som Spændingen af en Snor, der under Paavirkning af de samme Kræfter har Kurvens Form[1]). Der kan da spørges, hvorfor man her skal have, at Udtrykket for dp er et exakt Differential, medens den tilsvarende Fordring ikke gjordes ved bøjelige Snore. Svaret maa lyde, at det Udtryk, som man fik for dT ved bøjelige Snore, ikke skal gjælde for alle Værdier af x, y og z, men kun for dem, der bestemme Punkter af Snoren. Udtrykket for dp skal derimod gjælde for alle Værdier af x, y og z, som blot ligge indenfor de Grænser, som svare til det flydende Legemes Begrænsning.

5. Kræfter med Kraftfunktion. De fundne Ligevægtsbetingelser antage en særlig simpel Form, naar allerede $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ er et exakt Differential, eller naar der existerer en saadan Funktion U, at

$$\frac{dU}{dx} = X,\ \frac{dU}{dy} = Y,\ \frac{dU}{dz} = Z. \tag{4}$$

Ligning (2) gaar da over til

$$p = \int \varrho\, dU, \tag{5}$$

som ikke er mulig for alle Værdier af x, y, z, uden naar

$$\varrho = F(U). \tag{6}$$

Betingelserne (4) ere som bekjendt tilfredsstillede, naar de virkende Kræfter alene bestaa i saadanne Tiltrækninger til eller Frastødninger fra faste Punkter eller Masser, som foruden af de tiltrukne Partiklers Masser kun afhænge af Afstandene. I dette og i andre Tilfælde, hvor der existerer en Kraftfunktion U, bliver den nød-

[1]) Kun Fortegnet er forskjelligt, da der forudsættes at være Træk i Snoren, men Tryk i det flydende Legeme.

vendige og tilstrækkelige Betingelse for Ligevægten altsaa den, at Tætheden alene varierer med U, altsaa er den samme i alle Punkter af en hvilken som helst Niveauflade: $U = c$.

6. Det flydende Legemes Begrænsning. Et flydende Legeme kan begrænses dels af faste Flader, dels af de Flader, der skille det fra andre flydende Legemer, dels af frie Overflader.

De faste Flader gjengive netop det flydende Legeme dettes eget Tryk, og det bliver derfor ligegyldigt for dets Ligevægt, om disse Flader existere eller Legemet fortsættes.

Overgangen til et andet flydende Legeme faar her kun Betydning, hvis dette har en anden Tæthed, eller Overgangen er forbunden med en Ændring af de mekaniske Kræfter, og en fri Overflade kan betragtes som Overgang til et flydende Legeme med Tætheden Nul.

Hvis der til de akcelererende Kræfter hører en Kraftfunktion U, kan Overgangen til en ny Tæthed kun finde Sted langs en Niveauflade. De frie Overflader saa vel som Overgangsfladerne til flydende Legemer med anden Tæthed, f. Ex. fra Vædsker til Luft, maa altsaa i dette Tilfælde være Niveauflader.

Den Niveauflade, der foruden givne faste Flader begrænser et flydende Legeme, kan bestemmes, naar man kjender hele den flydende Masses Størrelse M. Sættes denne $= \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz$, skulle Grænserne bestemmes saaledes, at den indesluttes af de givne Flader, samt den søgte Niveauflade $U = c$, hvor c er en ubekjendt Konstant. Denne vil da være den eneste ubekjendte Størrelse, som indeholdes i Ligningen

$$\iiint \varrho \, dx \, dy \, dz = M.$$

Der kan selvfølgelig ogsaa bruges andre Koordinater.

Anvendelser. 1) Et ensartet luftformigt Legeme, der overalt har samme Temperatur, kan holdes i Ligevægt af Kræfter med en Kraftfunktion. Idet man kan sætte Tætheden $\varrho = kp$, hvor k er en Konstant, giver (2) nemlig

$$\frac{dp}{p} = k\,dU$$

eller $$l\frac{p}{p_0} = k(U - U_0).$$

Er Kraften en Newtonsk Tiltrækning til et fast Punkt, bliver $U = \frac{\mu}{r}$. Naar Afstanden r voxer i det uendelige, nærmer Tætheden sig til den endelige Grænse $p = p_0 e^{-\frac{k\mu}{r_0}}$.

Ligevægten vil forstyrres ved en Opvarmning, der ikke giver samme Temperatur langs hver enkelt Niveauflade.

2) En homogen, usammentrykkelig Vædske holdes sammen ved Delenes gjensidige Tiltrækning, vi ville antage efter den Newtonske Tiltrækningslov. Den vil da kunne være i Ligevægt, naar disse danne en Kugle, idet (Se Jul. Petersen Statik, S. 110) hver Partikel da tiltrækkes til Centrum med en Kraft $\frac{4}{3}\pi\mu\varrho r\,dm$, hvor r betegner Afstanden fra Centrum, μ Tiltrækningskonstanten, og Niveaufladerne derved blive Kugleflader med samme Centrum. Er hele Vædskens Masse M, bestemmes Radius til den hele Masses Overflade ved

$$\frac{4}{3}\pi\varrho a^3 = M.$$

Antage vi, at der uden om ligger et andet flydende Legeme, maa Trykket langs denne Flade have en konstant Værdi p_a (som bliver 0, hvis Fladen er en fri Overflade). Trykket i et vilkaarligt Punkt bestemmes, idet her Kraftfunktionen $U = -\frac{2}{3}\pi\mu\varrho r^2$ ved

$$p = p_a + \int_a^r \varrho\, dU = p_a + \frac{2}{3}\pi\mu\varrho^2(a^2 - r^2)$$
$$= p_a + \frac{g}{2a}\varrho(a^2 - r^2),$$

naar man kalder den akcelerende Kraft ved Overfladen $\frac{4}{3}\pi\mu\varrho a$ for g.

3) En tung Vædske er bragt i en jævn Rotation om en lodret Axe med Rotationshastigheden ω. Der søges Betingelserne for Vædskens relative Ligevægt.

Denne maa være tilvejebragt under Paavirkning dels af den givne absolutte Kraft: Massedelenes Vægt, dels af en Kraft lige stor med og modsat den, der vilde tilvejebringe Medføringsbevægelsen.

Denne sidste er Centripetalkraften. At tilføje er altsaa Centrifugalkraften.

Tages Rotationsaxen til z-Axe, og regnes den positiv opad, haves, idet Centrifugalkraften er $\omega^2 r dm$, hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$X = \omega^2 x,\ Y = \omega^2 y,\ Z = -g,$$

altsaa

$$p = \int \varrho\,(\omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz).$$

Niveaufladernes Ligning bliver altsaa

$$z - a = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2),$$

og de blive en Række kongruente Omdrejningsparaboloider om Rotationsaxen. Er Vædsken ikke homogen, maa den altsaa lejre sig i homogene Lag efter disse Paraboloider, hvorved ϱ bliver en Funktion af a. Er Trykket $p = p_0$ langs den til $a = a_0$ svarende Paraboloide, bliver (idet $U = -ga$)

$$p = p_0 + g\int_a^{a_0} \varrho\,da.$$

Det er uafhængigt af ω, og varierer langs enhver lodret Linie, ganske som om Vædsken stod stille. Hvis $a = a_0$ bestemmer Vædskens Overflade, er p_0 Lufttrykket eller, hvis Overfladen er fuldkommen fri, Nul.

Foruden af denne Flade maa Vædsken være begrænset af Væggene og Bunden i et Kar. Vi ville antage, at dette er en ret cirkulær Cylinder med Vædskens Rotationsaxe til Axe, med Radius a og med Bunden $z = 0$. Kjende vi da Vædskens Masse eller Volumen, kunne vi bestemme Overfladen $a = a_0$.

Vi kunne antage, at Volumen af Vædsken er $\pi a^2 h$, hvor h bliver Højden af Vædsken, hvis den stod stille. Da bliver, idet Overfladen bestemmes ved $z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + a_0$,

$$\pi a^2 h = 2\pi \int_0^a z\,r\,dr = \pi a^2 \left(\frac{\omega^2}{4g} a^2 + a_0\right).$$

hvoraf $a_0 = h - \frac{\omega^2}{4g} a^2$.

Denne Formel er dog kun brugelig, naar den gjør a_0 positiv. I modsat Fald skjærer Overfladen Bunden langs Cirklen $r^2 = -\frac{2ga_0}{\omega^2}$, og den Del af Bunden, som ligger indenfor Cirklen, bliver tør. Den lavere Grænse 0 for Integralet skal da ombyttes med $\sqrt{-\frac{2ga_0}{\omega^2}}$, og man faar

$$a^2 h = \frac{\omega^2}{4g} a^4 + a_0 a^2 + \frac{g}{\omega^2} a_0^2,$$

Denne Ligning faar, idet nu $h < \frac{\omega^2}{4g} a^2$, to negative Rødder

$$a_0 = a\left(-\frac{\omega^2 a}{2g} \pm \sqrt{\frac{\omega^2 h}{g}}\right),$$

af hvilke man skal bruge den, der svarer til øverste Tegn, da den anden vilde give $r^2 > a^2$.

Anmærkning. Hvis de faste og uforanderlige Flader, der begrænse det flydende Legeme, skjære en Niveauflade i flere adskilte Kurver, kræves der ikke til Ligevægten, at der skal være samme Tæthed og Tryk paa Enhed af Overflade i samme Niveauflades forskjellige Dele. Fordringen om, at p skal være et exakt Differential, gjælder nemlig kun, indtil man støder paa det flydende Legemes Begrænsning.

Af denne Grund kræves der til Ligevægt af tunge Vædsker i forbundne Kar kun, at Tæthed og Tryk paa Enhed af Overflade ere de samme, dels i de vandrette Snit i hvert Kar taget for sig, dels i de vandrette Snit i Karrenes Forbindelsesrør. Heraf udledes de fra Fysiken bekjendte Sætninger.

II. Tunge flydende Legemers Tryk paa faste Flader.

7. Et tungt flydende Legemes Tryk paa Enhed af Overflade. Naar Tyngden er den eneste akcelererende Kraft, som virker paa et flydende Legemes eller — som vi af Hensyn til de hyppigste Anvendelser ville nøjes med at sige — en Vædskes

Partikler foruden deres gjensidige Tryk og faste Fladers Modtryk, haves, idet z-Axen regnes lodret nedad fra Vædskens Overflade,

$$p = p_0 + g\int_0^z \varrho\, dz, \tag{7}$$

hvor p_0 er det paa Overfladen hvilende Tryk (Lufttrykket). Ses bort fra dette, som giver en ensformig Tilvæxt til Trykket paa Enhed af Overflade i alle Vædskens Punkter, er $p = g\int_0^z \varrho\, dz$, eller Trykket paa Enhed af Overflade i en vis Dybde er Vægten af den Vædske, som indeholdes i en lodret Cylinder, hvis Grundflade har Overfladen 1 og befinder sig i denne Dybde.

8. Tryk paa en plan Flade; Trykcentrum. Naar en plan Flade er nedsænket i en Vædske, vil der paa hvert af dens Elementer df hvile et normalt Tryk pdf. Idet alle disse Tryk ere parallele, kunne de sammensættes til en enkelt Kraft. Det Punkt, hvor den træffer Fladen, kaldes Trykcentret.

Vi ville antage, at Vædsken er tung og homogen, og at der intet Tryk hviler paa dens frie Overflade. Planens Skjæringslinie med denne, Vandgangslinien, tage vi til x-Axe i et retvinklet Koordinatsystem i Planen, og vi kalde Planens Vinkel mod Horizonten α. Da er i ethvert Punkt $p = g\varrho y \sin\alpha$, og det samlede Tryk T og Trykcentret ξ, η blive bestemte ved

$$T = g\varrho \sin\alpha \int y\, df,\quad T\xi = g\varrho \sin\alpha \int xy\, df,\quad T\eta = g\varrho \sin\alpha \int y^2 df, \tag{8}$$

hvor df betegner et Fladeelement af den givne Flade, og hvor Integrationerne udstrækkes til hele dennes Begrænsning.

I Overensstemmelse med 7 ses det, at Trykket er det samme, som om den plane Flade var vandret, og der derpaa hvilede en homogen Cylinder af samme Tæthed som Vædsken, skraat afskaaren ved en Plan $z = \sin\alpha \,.\, y$.

De Integraler, hvorved T og $T\eta$ ifølge (8) udtrykkes paa den fælles Faktor $g\varrho \sin\alpha$ nær, ere det givne Areals statiske Moment og dets Inertimoment med Hensyn til Vand-

gangslinien, og man vil have, at $\xi = 0$, eller at y-Axen gaar gjennem Trykcentret, naar den er en principal Axe i Begyndelsespunktets Centralellipse, hvilken for plane Arealers Vedkommende spiller samme Rolle, som Centralellipsoiden for Legemers Vedkommende[1]. Den anden principale Axe maa selve Vandgangslinien være. Det ses da, at Vandgangslinien er principal Axe for ét af sine Punkter, og dette bliver Trykcentrets retvinklede Projection paa Vandgangslinien.

Det indses, at Trykcentret, hvis Koordinater ere

$$\xi = \frac{\int xy\,df}{\int y\,df}, \quad \eta = \frac{\int y^2\,df}{\int y\,df}, \tag{9}$$

maa lade sig bestemme for en hvilken som helst given Vandgangslinie, der blot ikke skjærer Arealet A, naar man blot kjender dettes Tyngdepunkt, og de dertil hørende principale Axer og principale Momenter; thi derved kunne Inertimomenterne med Hensyn til alle rette Linier i Planen bestemmes.

For at finde denne Bestemmelse skulle vi for det første benytte os af, at selve Formlerne (9), som man let ser, ogsaa ere anvendelige, naar Koordinaterne ere skjævvinklede (men den Maade, hvorpaa vi have udtrykt dem i Ord er det ikke), og dernæst skulle vi anvende følgende Hjælpesætning om Centralellipsen:

Naar Koordinataxerne i et retvinklet eller skjævvinklet plant Koordinatsystem ere konjugerede Diametre i en i Planen indeholdt Figurs Centralellipse til Begyndelsespunktet, er

$$\int xy\,df = 0,$$

og denne Ligning vil, naar Tyngdepunktet ligger paa en af Koordinataxerne, vedblive at finde Sted, naar man tager et vilkaarligt Punkt af denne til Begyndelsespunkt.

For at bevise den første Del af denne Sætning kunne vi søge Inertimoment J med Hensyn til en vilkaarlig ret Linie gjennem

[1]) Centralellipsen er selv et Hovedsnit i Centralellipsoiden.

Begyndelsespunktet. Danner en paa denne vinkelret Linie Vinklerne α og β med Koordinataxerne, bliver

$$J = \int (\cos \alpha \,.\, x + \cos \beta \,.\, y)^2 \, df$$
$$= \cos^2 \alpha \int x^2 df + \cos^2 \beta \int y^2 df$$
$$+ 2 \cos \alpha \cos \beta \int xy df.$$

Afsættes $\frac{1}{\sqrt{J}}$ fra Begyndelsespunktet ud ad Linien, blive Koordinaterne til Endepunktet

$$x = \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\cos \beta}{\sin \omega}, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\cos \alpha}{\sin \omega},$$

hvor ω er Vinklen mellem Koordinataxerne. Centralellipsen til Punktet faar altsaa Ligningen

$$1 = \sin^2 \omega \left(x^2 \int y^2 df + y^2 \int x^2 df - 2xy \int xy df\right),$$

hvor Integralerne ere Konstanter. Skulle Koordinataxerne være konjugerede Diametre, maa man have $\int xy \, df = 0$.

Sætningens anden Del følger af, at $\int x \, df = 0$, naar y-Axen gaar gjennem det givne Areals Tyngdepunkt. Man faar altsaa i dette Tilfælde

$$\int x (y + b) \, df = \int xy \, df.$$

Konstruktionen af Trykcentret lader sig nu let udføre. I Centralellipsen til Tyngdepunktet konstruerer man den konjugerede Diameter til den med den givne Vandgangslinie parallele Diameter. Denne vil ogsaa, naar Skjæringspunktet med Vandgangslinien tages til Begyndelsespunkt tilfredsstille Betingelsen $\int xy \, df = 0$, óg maa altsaa gaa igjennem Trykcentret.

Dettes Beliggenhed kan dernæst bestemmes ved i den anden Ligning (9) at antage, at Koordinaterne ere retvinklede. Kaldes det givne Areal F, Tyngdepunktets Afstand fra Vandgangslinien d og F's Inertimoment med Hensyn til en vandret Axe gjennem Tyngdepunktet Fk^2, faar man, at Trykcentrets Afstand fra Vandgangslinien

$$\eta = \frac{F(k^2 + d^2)}{Fd} = \frac{k^2}{d} + d.$$

Man kan give Konstruktionen af Trykcentret en endnu simplere geometrisk Form ved en lille Ændring af Tyngdepunktets Centralellipse, nemlig naar man i Stedet for paa enhver Radius vector at afsætte $\frac{1}{\sqrt{J}}$, hvor J er det til Linien hørende Inertimoment, afsætter $r = \sqrt{\frac{AB}{F.J}}$, hvor A og B ere Inertimomenterne med Hensyn til de principale Axer, F den givne Flades Areal. Da A, B og F ere uafhængige af, hvilken Axe gjennem Tyngdepunktet man betragter, bliver den ved $r = \sqrt{\frac{AB}{FJ}}$ bestemte, ændrede Centralellipse ligedannet med den sædvanlige.

Sætte vi $A = F.b^2$, $B = Fa^2$, ses det ved at sætte $J = A$ eller B, at Ellipsens Halvaxer ere a og b. Sætte vi nu som før det vilkaarlige Inertimoment $J = Fk^2$, faas $r = \frac{ab}{k}$, hvorefter Sætningen om den uforandrede Størrelse af den mellem to konjugerede Halvdiametre indeholdte Trekant viser, at naar en saadans Grundlinie er r, bliver dens Højde k, eller at k er Centrets Afstand fra den med Axen for Inertimomentet J parallele Tangent til den ændrede Centralellipse.

Ligger nu Vandgangslinien i Afstanden d fra Tyngdepunktet, bliver dens Pols Afstand $\frac{k^2}{d}$. Dette var tillige Trykcentrets Afstand. Idet Trykcentrum og Pol tillige ligge paa samme Diameter i Centralellipsen, ses det, at Trykcentret i Forhold til Tyngdepunktet er det symmetriske Punkt til Vandgangsliniens Pol med Hensyn til Tyngdepunktets ændrede Centralellipse.

Kjender man altsaa blot den ændrede Centralellipse til et plant Areal, kan man derved bestemme Trykcentret til enhver Vandgangslinie, som blot ligger uden for Arealet. Denne sidste Betingelse bliver nødvendig derved, at naar Vandgangslinien skjærer Arealet, Trykkene paa dens ene Side helt forsvinde i Stedet for at skifte Fortegn, som de skulde, hvis Formler og Konstruktioner

skulde vedblive at være anvendelige. Dette sidste vil derimod finde Sted paa et Omraade af den tekniske Mekanik, hvor ganske de samme Bestemmelser finde Anvendelse, nemlig ved Undersøgelsen af en ensartet Bjælkes Modstand mod Træk, Tryk og Bøjning, saalænge Elasticitetsgrænsen ikke overskrides. Tversnittet træder i Stedet for det nedsænkede Areal, den neutrale Linie, ɔ: den, langs hvilken Fibrene hverken ere strakte eller sammentrykte, i Stedet for Vandgangslinien, og Vædskens Tryk og Trykcentret erstattes af den Kraft og dens Angrebspunkt (eller det Kraftpar), som for den givne lille Ændring kan træde i Stedet for den Modstand mod denne, som finder Sted langs det hele Tversnit.

9. Tryk paa krumme Flader. Det samlede Tryk af et flydende Legeme paa en uforanderlig krum Flade findes ved Sammensætning af Trykkene paa dens uendelig smaa Fladeelementer, der kunne betragtes som plane. Sammensætningen foretages ved at opløse disse Tryk efter 3 indbyrdes vinkelrette Retninger. Lad df være et Fladeelement, og p Trykket paa Enhed af Overflade det Sted, hvor det befinder sig. Komposanten af Trykket pdf efter en Linie, som danner Vinklen a med Fladens Normal, er da $pdf \cdot \cos a$. Det faar samme Værdi, som naar Fladeelementet df ombyttes med sin Projektion $df \cdot \cos a$ paa en Plan vinkelret paa den nye Retning, medens p bliver uforandret.

Er det flydende Legeme alene underkastet Tyngden, er det naturligt at lade den ene af de tre Retninger, hvorefter man opløser, være lodret, og altsaa de to vandrette. For de sidstes Vedkommende følger umiddelbart af den beviste Sætning, at Komposanterne af Trykkene paa en krum Flade efter en vandret Retning kunne sammensættes til en Kraft, der i Størrelse og Beliggenhed er den samme som Trykket paa Fladens Projektion paa en Plan vinkelret paa Retningen. Hvert Element befinder sig nemlig i samme Dybde som sin Projektion, saa det tilhørende p bliver det samme.

Idet baade Fladens Normal og Normalen paa den lodrette

Projektionsplan ere at regne positive i bestemte Retninger, nemlig fra den flydende Masse ind imod Fladen eller Projektionsplanen, faar $\cos \alpha$ og derved Projektionen et bestemt Fortegn for hvert Fladeelement. Er Fladen helt lukket, bliver dens Projektion Nul. De vandrette Tryk paa en lukket Flade, og altsaa paa et Legeme, der er nedsænket i den flydende Masse, holde derfor hverandre i Ligevægt.

Da et Fladeelements Projektion paa en vandret Plan er Tversnit i den lodrette Cylinder, som projicerer Elementet, og da $p = g \int_0^z \varrho \, dz$, naar den Plan, hvor Trykket er Nul[1]), tages til x-y Plan, bliver det lodrette Tryk, som et nedsænket Fladeelement, og derved det som en hel nedsænket Flade er underkastet, Vægten af den flydende Masse, som hvis dens Niveauflader fortsattes gjennem det nedsænkede Legeme, vilde indeholdes i den lodrette Cylinder, som projicerer Fladen paa den Plan, hvor Trykket er 0, og tillige begrænses af denne og af Fladen. Dette Tryk virker nedad eller opad, efter som det flydende Legeme er over eller under den trykkede Flade. Da det er sammensat af Trykkene paa de enkelte Fladeelementer er det ikke blot i Størrelse, men ogsaa i Beliggenhed, at det samlede lodrette Tryk fremstilles paa den angivne Maade.

Subtraherer man nu for et nedsænket Legemes Vedkommende det nedadgaaende Tryk fra det opadgaaende, kommer man til det Archimediske Princip: Naar et Legeme er nedsænket i en tung flydende Masse, er det underkastet et opadgaaende Tryk, Opdriften, som fremstilles ved den uddrevne flydende Masses Vægt og gaar igjennem dens Tyngdepunkt.

Det ses, at dette Princip ogsaa gjælder for ikke homogene flydende Masser; kun maa det forudsættes, at den uddrevne Masse

---

[1]) Vandspejlet, hvis man har en Vædske. Er den flydende Masse luftformig, vilde denne Plan være uendelig fjærn; men iøvrigt gjælder det sagte.

er den, der ved Fortsættelsen af Niveaufladerne vilde fylde det nedsænkede Legemes Plads. Skal dette Legeme være i Ligevægt, maa dets Vægt og Opdriften være lige store og falde paa samme rette Linie.

III. Svømmende Legemer.

10. Legemer, der svømme paa en homogen og tung Vædske. Det fremgaar af det foregaaende, at de nødvendige og tilstrækkelige Betingelser for Ligevægten af et tungt Legeme, der delvis er nedsænket i — svømmer paa — en homogen og tung Vædske, ere:

1) Rumfanget af den Del af Legemet, som ligger under Vædskens øverste Overflade, Vandspejlet, maa forholde sig til hele Legemets Rumfang, som Legemets Middeltæthed til hele Vædskens Tæthed. Dette Forhold, som maa være en ægte Brøk, ville vi kalde r.

2) Den Linie, som forbinder Legemets Tyngdepunkt med den uddrevne Vædskes Tyngdepunkt maa være lodret.

Er nu Legemet givet, kan man for at finde dets forskjellige mulige Ligevægtsstillinger begynde med at bestemme den Samling af Planer, som afskjære et Volumen $v = r\,V$, hvor V er det hele Legemes Volumen, altsaa som afskjære et Volumen af konstant Størrelse. Da disse Planer, Vandgangsplanerne, kun ere underkastede en enkelt Betingelse, existerer der i Almindelighed en dobbelt Uendelighed af dem; de ville altsaa ikke til Indhyllingsflade have en udholdelig Flade, men en almindelig Flade, Vandgangsfladen, som de kun berøre i et enkelt Punkt. Hver Plan faar uendelig mange konsekutive Planer, og Berøringspunktet er et Punkt, hvorigjennem Skjæringslinierne med alle disse gaa.

Det er ikke vanskeligt at se, at en Vandgangsplans Berøringspunkt med Vandgangsfladen er Tyngdepunktet i Vandgangsplanens Snit i Legemet. Det Rumfang, som begrænses mellem to Vandgangsplaner, skal nemlig være Nul, naar man regner det positivt til den ene og negativt til den anden Side

for Skjæringslinien. Danne nu Planerne en uendelig lille Vinkel a, bliver dette Volumen $\int a\,x\,df = a\int x\,df = 0$ idet df er et Element af det plane Snit, x dets Afstand fra Skjæringslinien. Denne gaar altsaa gjennem Snittets Tyngdepunkt. Idet det samme maa gjælde om Skjæringslinien med enhver konsekutiv Plan, bliver Tyngdepunktet det søgte Berøringspunkt.

For at man nu virkelig skal have en Ligevægtstilling, kræves der endvidere, at Perpendikulæren fra Legemets Tyngdepunkt T paa en Vandgangsplan skal gaa igjennem Tyngdepunktet S i det afskaarne Segment betragtet som fyldt med Vædske, altsaa som homogent. For denne Bestemmelses Skyld kan man betragte det geometriske Sted (S) for Tyngdepunkterne S i de afskaarne Segmenter. Stedet bliver en Flade, da det er en enkelt Bestemmelse af et Punkt at være Tyngdepunkt i et Segment afskaaret ved en Plan, som er underkastet en enkelt Betingelse. Dens Punkter S svare et for et til Punkterne af den nys fundne Indhyllingsflade.

Den fuldstændige Bestemmelse af Ligevægtstillingerne vil endog blive ført tilbage til en Anvendelse af Fladen (S), da man kan bevise, at en Tangentplan til (S) er parallel med den til Tyngdepunktet S svarende Vandgangsplan. Det gjælder derfor kun om fra T at drage en Normal TS til Fladen (S). Enhver saadan Normal giver en Ligevægtstilling: den skal blot stilles lodret, og Legemet samtidig synke saa dybt, at $v = r\ V$.

Bevis for Hjælpesætningen. Lad BC og $B'C'$ (Fig. 3) betegne to plane Snit, som begge afskjære Segmentet v, projicerede paa en Plan vinkelret paa deres Skjæringslinie. Idet Segment BDC = Segment $B'DC'$, bliver ogsaa

$$\text{Kile } BAB' = \text{Kile } CAC'.$$

Af Tyngdepunktslæren følger, at naar man anbringer parallele Kræfter af Størrelserne

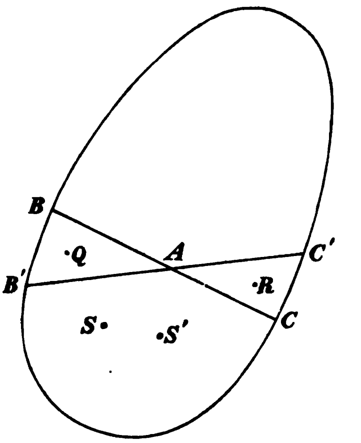
$$BDC, \; -B'DC', \; -BAB', \; CAC'$$

i de nævnte Rumfangs

Tyngdepunkter $\quad S \quad S', \quad Q, \quad R,$

holde disse hinanden i Ligevægt. De to første danne et Kraftpar

Fig. 3.



gjennem SS', de to sidste et Kraftpar gjennem QR. Kraftparrenes Planer maa da være parallele. Da dette skal finde Sted for alle Retninger af de parallele Kræfter, man maa have $SS' \neq QR$.

Den sidste Linie falder imellem de to Snitplaner BC og $B'C'$. Falder den sidste af disse Planer sammen med den første, maa SS' altsaa blive parallel med Planen BC. Samtidig falder S' sammen med S, og SS' bliver en Tangent til Fladen (S). Da saaledes alle Tangenter til denne i et Punkt S ere parallele med den tilsvarende Plan BC, maa Tangentplanen ogsaa være det.

I Almindelighed existerer der kun et begrænset Antal Normaler fra et Punkt til en Flade, og et Legeme faar derfor ogsaa kun et begrænset Antal Ligevægtstillinger. Den vigtigste Undtagelse er den. hvor Legemet begrænses af en Omdrejningsflade, hvis Axe gaar gjennem Tyngdepunktet T. Fladen (S) bliver nemlig da ogsaa en Omdrejningsflade om samme Axe, og Normaler til denne fra T danne Omdrejningskegler.

For ret staaende prismatiske Legemer, som vi idet mindste skulle antage homogene langs enhver ret Linie i Prismets Retning, kan man særlig søge de Ligevægtstillinger, hvor denne Retning er vandret. Ved denne Opgave kan man nøjes med at betragte den i Prismets Tversnit vinkelret paa dets Retning beliggende plane Figur. T ombyttes da med Tversnittets Tyngdepunkt, v ombyttes med et plant Areal af given Størrelse $\frac{v}{h}$ idet h er Legemets Højde, S med dette Areals Tyngdepunkt. Snittets Tyngdepunkt A bliver simpelt hen Midtpunktet af den Korde, der afskjærer Segmentet.

Til hver Ligevægtstilling af et Legeme, der er delvis nedsænket i en Vædske, for hvilken haves $\frac{v}{V} = r$, svarer en Ligevægtstilling af det samme Legeme nedsænket i en Vædske, for hvilken $\frac{v'}{V} = 1 - r$. Denne Ligning giver nemlig $v' = V - v$, eller, at v' skal være det Segment som i den først givne Ligevægtstilling er over Vædsken. I den nye Vædske skal man blot vende Legemet om, medens Vandgangslinien er den samme. Foruden $v' = (1 - r)$ V vil man nemlig da have, at Linien fra T til v''s Tyngdepunkt S' er lodret, eftersom Tyngdepunktet T til $V = v + v'$ maa ligge paa Linien SS'.

Man kan altsaa overalt i det foregaaende ombytte det nedsænkede Volumen v med det over Vædsken v', naar man blot ombytter r med $1 - r$. Resultater fundne for et vilkaarligt r, faa derved en dobbelt Anvendelse.

Anvendelser. 1) Legemet er ret prismatisk. Den nedsænkede Flade er, foruden Endefladerne, en parabolsk Cylinder. Der søges kun saadanne Ligevægtstillinger, hvor dennes Frembringere ere vandrette.

Det parabolske Segment BDC med Korden BC, er $= \frac{4}{3} \sqrt{p x'^3}$, hvor $x' = DA$ er det Stykke af Diameteren til Korden BC, som afskjæres af denne, og p er Parameteren til Parablen BDC. x' bliver altsaa konstant. Tyngdepunktet S i Segmentet ligger paa DA og er besemt ved $DS = \frac{3}{5} DA =$ konstant. Kurven (S) er altsaa en ny Stilling af Parablen BDC forskudt parallelt med sig selv. Til denne nye Parabel gjælder det altsaa om at konstruere en Normal fra Legemets Tyngdepunkt T. Bestemmelsen afhænger af en Ligning af 3die Grad. Om denne har en eller 3 reelle Rødder, beror paa T's Beliggenhed i Forhold til Parablens Evolut. For de paa denne Maade fundne Løsningers Vedkommende vil det endnu være at prøve, om den tilsvarende Linie BC virkelig vil skjære Parablen indenfor Begrænsningen af Legemets Tversnit. — Ligger T paa

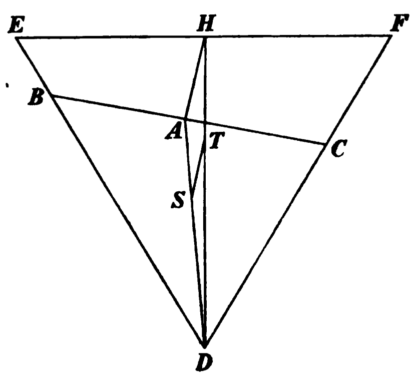
Parablens Axe, bliver den ene Normal selvfølgelig denne Axe; de to andre findes ved fra T at afsætte Subnormalen $\frac{p}{2}$.

2) Den nedsænkede Flade er en Omdrejningsparaboloide (Opgave løst af Archimedes). Man finder her ved Betragtning af Segmenter med givet Volumen og Bestemmelse af Tyngdepunktet i et saadant, at Fladen (S) er en Omdrejningsparaboloide kongruent med den givne og parallelforskudt. Normalerne til denne fra T maa ligge i samme Meridianplan som T. Hvis T ligger paa Omdrejningsaxen bliver der foruden Paraboloidens Axe, uendelig mange andre Normaler, der frembringe en Omdrejningskegle.

3) Legemet er ret og prismatisk, og foruden af Endefladerne er den nedsænkede Del begrænset af to Planer.

Skal $\triangle$ BDC med de faste Sider DB og DC (se Fig. 4) have et konstant Areal, bliver Stedet for Midtpunktet A af BC og dermed ogsaa for Tyngdepunktet S af $\triangle$ BDC en Hyperbel med Linierne DB og DC til Asymptoter. Paa denne skal der nedfældes Normaler fra Tyngdepunktet T. Disses Bestemmelse afhænger af en Ligning af fjerde Grad. Alt efter T's Beliggenhed mod Hyperblens Evolut er der 4 eller 2 Normaler, hvis Brugbarhed nærmere maa undersøges.

Fig. 4.



Hvis T ligger paa Halveringslinien af $\angle$ BDC, falde 2 af de søgte Normaler sammen med denne, og de øvrige afhænge af en Ligning af anden Grad. Dette vil f. Ex. være Tilfældet, naar Legemet er et homogent tresidet Prisme, hvis Tversnit er en ligebenet Trekant DEF med Toppunkt D paa den nedsænkede Kant.

Vi kunne særskilt behandle denne Opgave, idet vi sætte DE

$= a$ og den halve Toppunktsvinkel $EDH = \alpha$. Skal BC være et brugeligt Vandgangssnit, maa TS være $\perp BC$, idet T og S ere Tyngdepunkterne i Trekanterne EDF og BDC. Deraf følger, naar H og A ere Midtpunkterne af EF og BC, at $HA \perp BC$ eller $BH = CH$. Sættes nu $DB = x$ og $DC = y$, maa man have

$$x\,y = r\,a^2,$$

$$x^2 - 2\,a \cos \alpha \,.\, x \cos \alpha = y^2 - 2\,a \cos \alpha .\, y \cos \alpha,$$

hvoraf dels $x = y$, som lader Linien DH forblive lodret, dels

$$x + y = 2\,a \cos^2 \alpha.$$

Heraf faas

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = a\,(\cos^2 \alpha \pm \sqrt{\cos^4 \alpha - r}).$$

For at derved skal bestemmes en Ligevægtstilling, maa disse Værdier være reelle og ingen af dem større end a. Betingelserne herfor ere

$$\cos^4 \alpha \geqq r \geqq \cos. 2\,\alpha$$

Skulle de sidst fundne Løsninger give omvendte Ligevægtstillinger, hvor de to Kanter E og F ere nedsænkede, maa man have

$$\cos^4 \alpha \geqq 1 - r \geqq \cos 2\,\alpha.$$

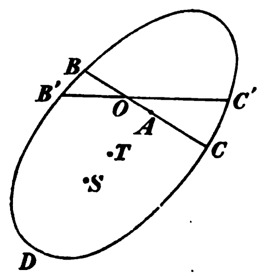
4. Om Stabiliteten af svømmende Legemers Ligevægt. Naar vi skulle undersøge, i hvilke Tilfælde svømmende Legemers Ligevægt er stabil, maa vi følge de almindelige Regler for Stabilitetens Bestemmelse. En Ligevægtstilling er stabil, naar under enhver lille Bevægelse, som skulde bringe Legemet ud af den, de givne Kræfter vilde udføre et negativt Arbejde.

De virkende Kræfter ere Vægtene af Legemets Massedele og Opdriften. Denne kan tænkes fordelt paa alle de Massedele, som ligge under Vandspejlet, med en Størrelse lig Vægten af en lige saa stor Rumdel Vædske. Denne ville vi antage homogen af Tætheden ϱ. Da Forandringer af denne Vægt til Nul ske langs en Niveauflade, Vandspejlet, existerer der en Kraftfunktion, og Ændringen i levende Kraft eller det derved udførte Arbejde bliver kun afhængig af Ændringen i Stillingen og uafhængig af den Vej, ad hvilken denne er opnaaet. Vi kunne da antage, at den er

foretagen saaledes, at man **først** uden at forandre Legemets Vandgangslinie har bragt den Linie i Legemet, som i den nye Stilling skal være Skjæringslinie mellem Vandspejlet og den til Ligevægtstillingen hørende Vandgangsplan, hen i sin nye Stilling, og **dernæst** har foretaget en Drejning om denne Linie. Ved den første Bevægelse udføres intet Arbejde af de givne Kræfter, som staa vinkelret paa Bevægelsesretningen. Vi skulle da blot undersøge det Arbejde, som udføres ved Drejning ud fra Ligevægtstillingen om en i Vandspejlet beliggende Axe.

Figuren fremstiller en Projektion paa en Plan vinkelret paa denne Axe, som er projiceret i O. BOC fremstiller Vandgangssnittet i Ligevægtstillingen, T Legemets Tyngdepunkt, S Tyngdepunktet af Segmentet BDC, og $B'OC'$ betegner den øjeblikkelige Skjæringslinie med Vandspejlet. Vinklen $C'OC$ sætte vi $= \vartheta$. Vandspejlet antages taget til xy Plan og z-Koordinaterne positive ned ad. Vi skulle nu undersøge det Arbejde som udføres ved Drejningen $d\vartheta$.

Fig. 5.



Det vil derved være bekvemt paa den ud af Vædsken løftede Kile BOB' at tænke anbragt lige store og modsatte Kræfter, som for hver enkelt Partikels Vedkommende er lig Vægten af samme Rumfang Vædske. Derved blive Kræfterne:

1) Legemets Vægt gM anbragt i dets Tyngdepunkt T;

2) den samme Vægt, men virkende opad, i den i Ligevægtstillingen uddrevne Vædskemasses Tyngdepunkt S;

3) Vægten af Kilen COC' fyldt med Vædske, virkende opad, og af Kilen BOB' fyldt med Vædske og virkende nedad.

Det af de to første udførte Arbejde bliver, idet ϑ varierer fra 0 til en Grænseværdi ϑ til

$$gM \,.\, TS(1 - \cos\vartheta),$$

hvor $TS = a$ regnes positiv, naar som her T i Ligevægtstillingen

ligger over S. For smaa ϑ kan det med Bortkastelse af Led over anden Orden sættes

$$g \,.\, M \,.\, a \,.\, \frac{\vartheta^2}{2} = g \,.\, \varrho\, a\, v \frac{\vartheta^2}{2},$$

hvor v er Volumen af Segmentet BDC.

Under denne samme Forudsætning vil, naar man ved df betegner et Element af det oprindelige Vandgangssnit BOC, og ved r dets Afstand fra Axen O regnet positiv i Retningen OC, den under Nr. 3 hørende Kraft, som paavirker den paa Elementet df staaende Cylinder i en af Kilerne COC' BOB', naar den regnes positiv nedad, udføre Arbejdet

$$- g \,.\, \varrho\, r\, \vartheta\, df \,.\, r \,.\, d\,\vartheta.$$

Elementerne df skulle tages over hele Snittet BOC, idet den Omstændighed, at dette ikke falder nøjagtig sammen med Projektionen af $B'OC'$ paa dens Plan, kun giver Anledning til Fejl af højere end anden Orden.

Ombyttes Integralet $\int r^2\, df$ med Snittets Inertimoment J, og integreres fra 0 til ϑ, faas

$$- g\, \varrho\, J \frac{\vartheta^2}{2}.$$

Det hele udførte Arbejde bliver altsaa

$$g\, \varrho \frac{\vartheta^2}{2}\, (a\, v - J).$$

Dette er altid negativt, naar a er negativ, ɔ: naar i Legemets Ligevægtstilling dets Tyngdepunkt falder under den uddrevne Vædskemasses. I saa Fald er Ligevægtstillingen altsaa altid stabil. Naar Legemets Tyngdepunkt falder over den uddrevne Vædskemasses, bliver Betingelsen for Stabilitet, at Momentet af den uddrevne Vædskemasses Volumen, anbragt i dets Tyngdepunkt, med Hensyn til en vandret Plan gjennem Legemets Tyngdepunkt er mindre end Vandgangssnittets mindste Inertimoment, eller end dets Inertimoment med Hensyn til den store Axe i dets Tyngdepunkts Centralellipse.

Da foranstaaende „Forelæsning over Hydrostatik" alligevel skulde trykkes eller autograferes af Hensyn til Undervisningen paa polyteknisk Læreanstalt, tillader jeg mig at indrykke den i Tidsskriftet i det Haab at denne samlede Fremstilling muligvis kan have nogen Interesse for flere end dem, for hvem den umiddelbart er bestemt. Jeg maa dog derved udtrykkelig bemærke, at dette Arbejde er mindre originalt, end hvad jeg ellers plejer at offentliggjøre. Fremstillingen er vel i det enkelte overalt min egen, og et lille Afsnit, det om Trykcentrets Bestemmelse, har jeg ogsaa givet en mere selvstændig Bearbejdelse; men man vil hverken finde saglig nye Beviser eller Bemærkninger, undtagen maaske en Fremdragen S. 135 af en vel meget nærliggende men dog for lidet paaagtet Omstændighed. I Læren om Stabiliteten af svømmende Legemers Ligevægt har jeg benyttet den af Jul. Petersen paa Naturforskermødet 1868 i Kristiania givne Begrundelse (Se Meddelelser om Mødet).

OM BINÆRE FORMERS KOVARIANTER.

(af Julius Petersen).

(Se Aargangene 1880 og 81).

---

1. Jeg har tidligere vist, at enhver Kovariant bestemmes af en Halvinvariant, og at der er samme Relation mellem visse Kovarianter som mellem de bestemmende Halvinvarianter, der netop ere Kovarianternes første Koefficient. Undersøgelse af Afhængigheden mellem Kovarianter er derved ført tilbage til Undersøgelse af Afhængigheden mellem Halvinvarianter.

Jeg har endvidere vist, at man kun behøver de Halvinvarianter, som jeg har betegnet ved a_0, c_2, c_3 . . . c_n, for ved dem at udtrykke enhver Halvinvariant til a_x^n helt og rationalt, naar Halvinvarianten først er multipliceret med en saadan Potens af a_0, at dens Grad og Vægt ere lige store. Som bekjendt har Gordan imidlertid vist, at der kan findes et saadant endeligt Antal Halv-

invarianter, at alle andre (uden nogen Multiplikation med en Potens af a_0) kunne udtrykkes helt og rationalt ved disse. Dette Bevis er overordentlig vanskeligt og uoverskueligt og giver ikke nogen almindelig Bestemmelse af de for a_x^n nødvendige Grundformer. Sylvester og Cayley have søgt at bestemme disses Antal, samt hver enkelts Grad og Vægt (eller Orden) og ere ved ét med megen fremmed Hjælp udført langvarigt Arbejde naaede til lidt over $n = 10$. Den Tanke, der ligger til Grund for dette Arbejde, er omtrent følgende:

En Halvinvariant u skal tilfredsstille Ligningen

$$\Delta_1 u = 0 \text{ eller } a_0 \frac{du}{da_1} + 2a_1 \frac{du}{da_2} \ldots + na_{n-1} \frac{du}{da_n} = 0.$$

Har man flere saadanne af samme Grad og Vægt, ville ogsaa lineære Forbindelser af disse være Halvinvarianter. Man kan nu søge hvormange saadanne med given Grad og Vægt, der ere lineært uafhængige af hinanden. Man kommer derved meget let til en Differensligning, der kan tjene til at bestemme det søgte Tal ved en rekurrent Fremgangsmaade. Sylvester gaar en lidt anden Vej, idet han finder en Funktion, som ved Udvikling i Række efterhaanden giver de søgte Tal som Koefficienter til Rækkens Led. Det er denne Bestemmelse, hvis praktiske Udførelse kræver et saa betydeligt Arbejde.

Ere nu disse Tal bestemte tilstrækkelig højt op, kan ethvert af dem formindskes ved Benyttelse af de lavere; har man f. Ex. fundet Antallet af lineært uafhængige Halvinvarianter af Graden 6 og Vægten 9, saa kan man undersøge, hvor mange saadanne der kunne dannes ved Multiplikation af simplere, der tidligere ere indførte som Grundformer; er Tallet paa denne Maade reduceret saa meget som muligt, vil det Antal, der bliver tilbage, være Grundformer. Man ser let, at der kan opkastes grundet Tvivl om, hvorvidt denne Methode giver det mindst mulige Antal Grundformer, hvad Sylvester i øvrigt ikke er uvidende om. Antallet voxer meget stærkt; saaledes er der henholdsvis for $n = 4, 5, 9$ et Antal af 5, 23, 415; man maa imidlertid vel erindre, at det ikke er selve Grundformerne, men kun deres Antal, Grad og Vægt, der her er

søgt bestemt. Det store Arbejde, som her er udført, synes mig ikke at have givet et tilsvarende Udbytte. Saasnart man kommer til et Antal af Grundformer, der gaar i Hundreder, og af hvilke de fleste ere særdeles sammensatte, bliver den Nytte, man kan vente af dem, forsvindende. Kun for $n = 2$, 3 og 4 ere Systemerne af Grundformer haandterlige, saa at disse have en særlig Interesse; det følgende gaar ud paa at give et simpelt Bevis for, at disse Systemer ere fuldstændige.

2. Dersom vi i en Halvinvariant, indeholdende Bogstaverne $a_0, a_1 \ldots a_n$, sætte for disse Bogstaver henholdsvis $0, a_0, 2a_1, 3a_2 \ldots na_{n-1}$, faa vi atter en Halvinvariant.

Lad A være de Led, der ikke indeholde a_0, saa at vi kunne skrive Halvinvarianten

$$u = A + Ba_0;$$

og lad os sætte $\Delta_1 u = a_0 \frac{du}{da_1} + \Delta' u$; vi faa da

$$0 = \Delta_1 u = a_0 \frac{dA}{da_1} + \Delta' A + a_0 \Delta_1 B;$$

her kan $\Delta' A$ ikke indeholde a_0, og man maa derfor have

$$0 = \Delta' A = 2a_1 \frac{dA}{da_2} + 3a_2 \frac{dA}{da_3} \ldots + na_{n-1} \frac{dA}{da_n}.$$

Sætte vi nu a_0 for a_1, $2a_1$ for a_2 o. s. v., og bliver derved A til A', have vi

$$a_0 \frac{dA'}{da_1} + 2a_1 \frac{dA'}{da_2} \ldots + (n-1)\, a_{n-2} \frac{dA'}{da_{n-1}} = 0,$$

der viser, at A' er en til Formen a_x^{n-1} hørende Halvinvariant. Man maa imidlertid ikke tro, at Halvinvarianterne A' give alle de til a_x^{n-1} hørende Halvinvarianter; de give i Virkeligheden kun en heri indbefattet mindre Gruppe. Kan man vise, at man kan danne hele denne Gruppe ved Addition og Multiplikation af et endeligt Antal af dem, da er derved Beviset ført for, at det samme gjælder om Systemet u, thi to Halvinvarianter u, der have Leddet A fælles, have en Differens, der er dannet ved Multiplikation af a_0 og en anden Halvinvariant af lavere Grad end u. Vi mærke os,

at dersom u har Graden g og Vægten v, vil A' have Graden $g' = g$ og Vægten $v' = v - g$.

Jeg skal ikke opholde mig ved $n = 2$, hvor man strax ser, at a_0 og $c_2 = a_0 a_2 - a_1^2$ danne det fuldstændige System, men strax gaa over til $n = 3$. Det gjælder her om at vise, at det fuldstændige System dannes af

$$a_0,\ c_2,\ c_3 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3 \text{ og Invarianten}$$

$$J = \frac{c_3^2 + 4 c_2^3}{a_0^2}.$$

Disse give følgende af Systemet A'

$$a_0^2,\ a_0^3,\ a_0^2 (a_0 a_2 - a_1^2).$$

Det gjælder nu om at vise, at enhver Halvinvariant af Systemet A' kan udtrykkes ved disse under hel Form. Nu ere de alle af Formen $a_0^\alpha c_2^\beta$ og, da som bekjendt $3g \gtreqless 2v$, altsaa her $2g' \gtreqless 2(v' + g')$, hvoraf $g' \gtreqless 2v'$, maa man have

$$\alpha \gtreqless 2\beta.$$

Man ser heraf, at der kun er et Tilfælde, i hvilket en Halvinvariant A' ikke kan udtrykkes ved de tre ovenfor fundne, nemlig naar $\alpha = 2\beta + 1$, men man kan vise, at dette Tilfælde ikke kan indtræffe; den tilsvarende Halvinvariant u maatte nemlig have Formen

$$u = a_1 J^\beta + a_0 Q,$$

hvoraf
$$0 = \Delta_1 u = a_0 J^\beta + a_0 \Delta_1 Q$$

eller
$$\Delta_1 Q = - J^\beta,$$

en Ligning, der som tidligere vist, ikke kan finde Sted (Se Aarg. 1881, S. 37).

Det er saaledes vist, at det opstillede System af 3 Halvinvarianter og en Invariant er det fuldstændige System for Formen a_x^3.

For $n = 4$ tage vi som Grundformer

$$a_0,\ c_2,\ c_3,\ i = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2;$$

$$j = (a_0 a_2 - a_1^2) a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2;$$

der fører til følgende A'

$$a_0^2,\ a_0^3,\ c_2 \text{ og } c_3.$$

Det kommer derfor an paa at vise, at alle A' kunne udtrykkes under hel Form ved disse. For en vilkaarlig A' faa vi $g_1 \gtreqless v_1$; om en saadan er det bekjendt, at den kan udtrykkes under hel

Form ved a_0, c_2 og c_3; den kan derfor ogsaa udtrykkes ved a_0^2, a_0^3, c_2 og c_3, undtagen i det Tilfælde, hvor den har Formen

$$a_0 \, (c_2^{\alpha_1} c_3^{\beta_1} + c_2^{\alpha_2} c_3^{\beta_2} \ldots),$$

et Tilfælde, der imidlertid ikke kan indtræffe; det maatte nemlig hidrøre fra et u af Formen

$$a_1 H + a_0 Q,$$

hvor H er en til a_x^4 hørende Halvinvariant; for denne finder man imidlertid $g = 2v$, der netop er Invariantbetingelsen; vi have da det samme umulige Tilfælde som ovenfor, og det er bevist, at Halvinvarianterne

$$a_0, \; c_2, \; c_3$$

og Invarianterne

$$i \text{ og } j$$

danne det fuldstændige Formsystem for a_x^4.

LØSNING AF OPGAVERNE 230 OG 566.

230. *ABCD* er en Firkant, *B* og *D* ere Punkter i en Ellipse, hvis Brændpunkter ere *A* og *C*; dersom *D* er fast, medens *B* bevæger sig, saa spørges om det geometriske Sted for Tyngdepunktet af Firkantens Perimeter.

Anbringes i Midtpunkterne *M*, *N*, *Q* og *R* af Siderne *AB*, *BC*, *CD* og *DA* parallele Kræfter af Størrelse som de tilsvarende Sider, vil Angrebspunktet for disse Kræfter være Tyngdepunktet for Trekantens Perimeter. Kræfterne i *M* og *N* sammensættes til en Kraft $AB + BC$ med Angrebspunkt *O* og Kræfterne i *Q* og *R* sammensættes til en Kraft $CD + DA$ med Angrebspunkt *P*. Disse 2 Kræfter sammensættes atter til en Kraft med Angrebspunkt *X*, og det er da det geometriske Sted for Punktet *X*, som skal bestemmes.

Da Punktet *P* ligger fast og $AB + BC = CD + DA$, maa *X* være Midtpunktet af *PO* og altsaa beskrive en Kurve ligedannet med den, *O* beskriver.

Ifølge parallele Kræfters Sammensætning, bestemmes nu O ved

$$AB \,.\, MO = BC \,.\, NO,$$

og idet S er Midtpunktet af AC og

$$AM + MS = a,\ AS = b, \text{ faar man}$$

$$MO\,(a - MS) = (b - MO)\,MS,$$

altsaa

$$MS : MO = a : b. \tag{1}$$

M gjennemløber en Ellipse, og idet MO skjærer den Ledelinie til denne, som svarer til Brændpunktet S, i T, er $MS : MT$ konstant, og altsaa faar man af (1), at $MO : MT$ og altsaa tillige

$$OT : MT$$

er konstant. Den Kurve, O beskriver, kan da frembringes ved, at man gjennem Ledelinien lægger en Plan og paa denne parallelprojicerer Ellipsen, saa det geometriske Sted for O bliver en Ellipse med en Axe paa AC, og Symmetrien om S viser, at dette Punkt er Ellipsens Centrum.

Det geometriske Sted for X er da en Ellipse med sine Axer parallele med den givne Ellipses.

(A. S. Bang).

566. At bestemme n Vægtlodder saaledes, at man ved dem paa en almindelig ligearmet Vægtstang kan veje alle Vægte 1, 2, 3 . . . p, hvor p er saa stor som muligt.

(P. Vedel.)

Summen af de n Vægtlodder er p (Enheder).

Vægtloddet a er af Vægten 1.

p.	Enheder kan altsaa afvejes.
$p - 1$.	(Ved at tage a bort fra Vægtskaalen).
$p - 2$.	(Ved at flytte a over paa samme Side af Vægtskaalen, hvor det, der skal vejes, ligger).

Vægtloddet b er af Vægten 3.

p.	$p-3$.	$p-2.3$.	Enheder kan altsaa afvejes, nemlig alle de Enheder, der kan afvejes uden Hensyn til b's Vægt, og dernæst alle disse Vægtmængder $-$ b's Vægt og de samme Vægtmængder $-$ $2 \,.\, b$'s Vægt.
$p-1$.	$(p-1)-3$.	$(p-1)-2.3$.	
$p-2$.	$(p-2)-3$.	$(p-2)-2.3$.	

Naar der paa Vægtskaalen 1) kan afvejes alle Enheder mellem p og $p - (3m - 1)$, og endvidere 2) et af Lodderne, (hvis Vægt er uden Betydning for Opfyldelsen af den under 1 satte Betingelse), har Vægten $3m$, saa kan der afvejes:

$p.$	$p - 3m.$	$p - 2 . 3m.$
$p - 1.$	$p - (3m + 1).$	$p - (2 . 3m + 1).$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p - (3m - 1).$	$p - (2 . 3m - 1).$	$p - (3^2 m - 1).$

altsaa alle Vægtene mellem p og $p - (3^2 m - 1)$. [1])

Have derfor Lodderne paa Vægtskaalen Vægtene $1, 3, 3^2, .. 3^{n-1}$, saa kan der med dem afvejes alle Vægtene fra p (alle Loddernes Sum) til $p - (3^n - 1)$.

Summen p af alle Lodderne er jo imidlertid

$$\frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2},$$

og alle Vægte mellem

$$p \text{ og } p - (3^n - 1) = -p$$

kan saaledes afvejes med Lodderne

$$1;\ 3;\ 3^2;\ 3^3;\ \ldots .\ 3^{n-1}.$$

Mellem p og $-p$ ligger imidlertid alle hele Tal fra 0 og opefter, og Loddernes samlede Vægt er selvfølgelig den største Vægt, der kan afvejes paa Vægtskaalen.

(Peter Eberlin).

LITERATUR.

Adjunkt F. W. Johnsen: Geometriske Tegneopgaver. Hempelske Bog- og Papirhandels Forlag. Odense 1888.

Bogen er delt i 2 selvstændige Dele, af hvilke den første: Plangeometriske Opgaver af Forfatteren nærmest er bestemt til at

[1]) Hvis en hel Række af disse Vægte ere negative, vil det selvfølgelig kun sige, at det, der skal vejes, skal lægges paa den modsatte Vægtskaal af den, vi oprindelig gik ud fra var den, hvorpaa det skulde lægges.

forberede til Projektionstegningen, der behandles i 2den Del, hvis Titel er: Parallel- og Centralprojektion med Skyggelære.

1ste Del indeholder 173 Opgaver, af hvilke de 77 første ifølge Fortalen skulle give Elever, der ikke have lært Mathematik, det nødvendige Kjendskab til saadanne plangeometriske Konstruktioner, som maa forudsættes i Projektionstegningen. Mange af dem ere ledsagede af Løsninger — dog uden Begrundelse — og der er imellem dem optaget nogle Øvelser i Præcisionstegning og Konstruktion af Maalestokke. Elever, der have lært Mathematik, ville ved Udførelsen af disse Opgaver kunne erhverve sig Færdighed i Brugen af Tegneapparaterne og have desuden i Opg. 78—173 et Udvalg af Konstruktionsopgaver, af hvilke mange i Vanskelighed gaa ud over, hvad man f. Ex. forlanger til alm. Forberedelsesexamen. Af disse Opgaver ere 78—106 ledsagede af Løsninger.

I 2den Del behandles først i dobbelt retvinklet Projektion omtrent de sædvanlige Opgaver med Hensyn til Planer og rette Linier, samt Flerplanslegemers Skjæring og Udfoldning, deres Skjæring med Cylinder-, Kegle- og Kuglefiader og disse Fladers indbyrdes Skjæring og Udfoldning. I dette Afsnit findes 87 Opgaver. Dernæst forklares Hovedtrækkene i Centralprojektion, og der udvikles udførlig, hvorledes man, naar en ret Linies Stilling til Tegneplanen er given ved Afstande og Vinkler, kan bestemme dens Retningspunkt og Projektion og afsætte Stykker af given Længde ud af den. De givne Methoder anvendes paa 19 Opgaver, af hvilke enkelte ere ledsagede af Løsninger. Endelig findes der 23 Opgaver i Konstruktion af Slagskygger, baade i retvinklet og perspektivisk Projektion, med korte Anvisninger, der dog ere illustrerede ved fuldstændige Løsninger af nogle af Opgaverne.

Begrundelserne i Bogens 2den Del, der ere gode og tydelige, støtte sig til de i de stereometriske Lærebøger sædvanlig medtagne Sætninger. For de Elever uden mathematiske Kundskaber, hvem 1ste Del skulde forberede til Projektionstegningen, maa der naturligvis mellem 1ste og 2den Del indskydes en mundtlig Meddelelse af Stereometriens Definitioner og simplere Sætninger, men det er jo iøvrigt en Erfaring, at disse Sætninger ved deres iøjnefaldende

Rigtighed hurtig binde sig til Hukommelsen, saa at Mangelen af et forudgaaende stereometrisk Kursus ikke virker saa hæmmende ved Undervisningen i Projektionstegning, som man skulde vente. Baade Ordningen af Stoffet og Valget af Opgaverne forekommer Anm. i det Hele heldigt. Det er saaledes utvivlsomt hensigtsmæssigt, at Indførelsen af en ny lodret Projektionsplan, der jo er et af Projektionstegningens vigtigste Hjælpemidler, strax omtales — om end noget kort —, og at en stor Del af de første Opgaver gaa ud paa at tegne Projektionerne af for Eleverne vel bekjendte Legemer i simple Stillinger til Projektionsplanerne. Hvor Planer behandles, antages de hyppigst givne ved Projektionerne af Planfigurer i dem, hvorved opnaas, at Eleven ikke vænnes til at betragte det som en Nødvendighed at fremstille Planer ved deres Spor, hvad ofte er en Omvej og i Projektionstegningens praktiske Anvendelse kun spiller en ringe Rolle. En Del af Opgaverne gaa ud paa at tegne Gjenstande, hvis Dimensioner og Beliggenhed imod Projektionsplanerne ere givne ved Tal, hvorved Eleven øves i Tegning efter Opmaaling og sikres mod de forøgede Vanskeligheder, som et uheldigt Valg af Projektionsplaner fører med sig.

Man savner enkelte Opgaver, saasom Hjørnekonstruktionerne, der dog ikke sjeldent faa Anvendelse, og ved Behandlingen af andre Opgaver har Forf. været temmelig kortfattet. Bestemmelsen af Punkters Afstande fra Linier og Planer i Parallelprojektion og Figurernes Nedlægning i Centralprojektion berøres kun løselig. Ogsaa ved Bestemmelsen af Fladers Skjæring i Parallelprojektion savnes enkelte Oplysninger. Ved Fig. 19 (Skjæring mellem Prisme og Kugle) er saaledes ikke angivet, hvorledes Røringspunkterne mellem Snittets Projektioner og Kuglens Konturer findes, og ved Fig. 18 (Skjæring mellem Pyramide og Cylinder) gjøres der ikke Rede for, hvorledes man skal bestemme de Punkter af Snittet, som ved den sædvanlige Fremgangsmaade ikke kunne findes med Nøjagtighed paa Grund af Skjæring under altfor spidse Vinkler.

Figurerne, der findes inde i Texten, ere gode og tydelige.

(C. Crone).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von / **Journal rédigé par**

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og **H. G. Zeuthen.**

FEMTE RÆKKE.

Sjette Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1888.

SJETTE HEFTE.

NB. Se Omslagets Bagside.

OM LIGNINGER I 10ENDE BOG AF EUCLIDS ELEMENTER.

(AF S. A. CHRISTENSEN).

Kap. I. Kort Oversigt over Bogens Indhold.

1. Som bekjendt angaar 10ende Bog af Elementerne irrationale Størrelser, men Euclid omtaler aldrig i denne Bog Størrelser paa anden Maade end som geometriske, altsaa fremstillede ved Linier og Arealer, og vi ville derfor for direkte at kunne overføre hans Sætninger og Beviser paa Tallæren, udtrykke alle Linier ved en Linieenhed, m — den rationale Linie 1 —, saaledes at alle Arealer udtrykkes ved Fladeenheden m^2. Man kan da henføre alle hans Størrelser til disse, de tilkomne Faktorer blive da Tal — rationale eller irrationale —, som vi udtrykke ved smaa græske Bogstaver.

De fremkomne Udtryk have da for os samme Værdi, enten der findes Faktoren m eller m^2, medens der for Euclid theoretisk er en Forskjel. Vi ville da for at holde os saa nær til hans Fremstilling som mulig, bibeholde denne Adskillelse, idet vi tale om 2den Grads Størrelser (fordi m findes deri i 2den Potens), der da betyde det samme som Euclids Arealer. For at faa Tallæren frem, behøve vi da blot at udelade Enhederne m og m^2, men idet vi føre dem med i Regningen, opnaa vi, at man af vore Formler direkte kan læse Euclids Udtryk i hans Form.

Naar vi derfor overalt beholde Udtrykket „Størrelse“ og ikke erstatte det med „Tal“, er det af denne Grund. Hvor vi derfor tale om „Tal“, maa man derved forstaa hele eller brudne Tal.

2. Bogen giver en udtømmende Behandling af de irrationale Størrelser, der kunne udtrykkes ved Kvadratrod eller ved 4de Rod, idet dog de enleddede Kvadratrødder ikke umiddelbart for Euclid stille sig som irrationale. Man har kaldt de af ham behandlede Størrelser for Irrationaliteter af 1ste Art.

Denne Bog er den, om hvilken man tør sige, at er der nogen,

der skyldes Euclid selv, er det denne[1]). Indholdet var nyt og kun lidet udviklet paa hans Tid. Selve Betegnelserne ere vanskelige, og kun det var kjendt, som stammer fra Behandlingen af 2den Grads Ligningen, som man maa have haft et nøje Kjendskab til. Naturligst er det ogsaa at antage, at numeriske Ligninger vare kjendte, ellers vilde man vanskeligt komme til en Diskussion af Rødderne, der bliver den eneste Vej, hvorpaa man førtes til Udtryk af Formen $a \pm \sqrt{b}$, der tillige i 10ende Bog stadig vender tilbage som Rødder i 2den Grads Ligningen. Havde man ikke haft de numeriske Ligninger, som føre til at angive Betingelser for rationale Løsninger, vilde i den geometriske Fremstilling den ene Linie give en lige saa god Løsning som den anden, naar det hele indskrænkede sig til en Fremstilling ved Linier, og der vilde da ingen Anledning være til de Undersøgelser, som findes i 10ende Bog.

Prof. Zeuthen hævder ogsaa i sin „Keglesnitslære i Oldtiden", at Fremstillingen af 2den Grads Ligningen geometrisk hos Euclid i Forbindelse med den algebraiske 2den Bog gav Regneregler for den numeriske Løsning. Manglen af et Tegnsprog nødvendiggjorde den geometriske Fremstilling, naar det gjaldt almindelige, theoretiske Resultater[2]), og saaledes maa ogsaa den geometriske Fremstilling i 10ende Bog opfattes, og en Overføring i moderne Tegnsprog kan da ikke staa i Modstrid med Bogens oprindelige Betydning.

3. I de fire Definitioner, der indlede Bogen[3]), faa vi Størrelserne inddelte i:

I) Størrelser kommensurable med den rationale Enhed — af Formen ma.

II) Størrelser inkommensurable med den rationale Enhed, hvoraf atter fremtræder to Arter, nemlig:

a) Størrelser, hvis Kvadrater ere kommensurable med Enhedens Kvadrat — $m\sqrt{a}$ — og

---

[1]) Se Tannery Revue philosophique XI 1881 i Afhandlingen L'éducation platonnienne og samme Forfatters Afh. De la solution géom. des problèmes du second degré avant E. i Mémoires de la société des sciences phys. et naturr. de Bordeaux 2. Ser. Tom. 4. 1882.

[2]) Nesselmann: Die Algebra der Griechen.

[3]) Efter Dr. Heibergs Udgave Opera omnia Euclidis. Vol. III.

b) Størrelser, hvis Kvadrater ere inkommensurable med Enhedens Kvadrat.

Den første Klasse Størrelser kaldes „rationale, kommensurable i 1ste Potens“, den anden Klasses Afdeling a „rationale, kun i 2den Potens kommensurable“ og Afdeling b „irrationale“.

Naturligvis kunne to rationale kun i 2den Potens kommensurable eller to irrationale Størrelser være indbyrdes kommensurable saavel i 1ste som i 2den Potens.

Denne Forskjel fra Nutiden i Begrebet „Rationalitet“ skyldes den geometriske Fremstilling, idet Kvadratet paa en Størrelse fremstillet af en enkelt Kvadratrod er rationalt, hvorfor det da ligger nær at kalde Størrelsen selv rational, men til Adskillelse fra den almindelige rationale Størrelse tilføjes „kun i 2den Potens kommensurabel“.

4. Første Afsnit af Bogen lærer os at undersøge, hvorvidt en Størrelse er rational kommensurabel i 1ste eller kun i 2den Potens eller ikke rational. Sætningerne i dette Afsnit gaa til Sætn. 21.

Andet Afsnit (Sætn. 21—36) behandler den simpleste Art af irrationale Størrelser, nemlig Medialen, der er udtrykt ved en enkelt fjerde Rod. Den dannes ved rationale kun i 2den Potens kommensurable Størrelser, idet man søger den Størrelse, hvis Kvadrat er lig Produktet af 2 saadanne. $x^2 = m\sqrt{\alpha} \,.\, m\sqrt{\beta}$, $x = m\sqrt[4]{\alpha\beta}$.

Tredie og fjerde Afsnit (Sætn. 36—72, 73—111) give os Behandlingen af de sammensatte toleddede irrationale Størrelser, idet tredie Afsnit behandler de ved Addition dannede og fjerde de ved Subtraktion dannede. Vi betragte dem under et, da Forskjellen helt igjennem kun er den, at naar der det ene Sted skal læses adderes, skal der det andet læses subtraheres.

Resten af Bogen er enkeltstaaende Sætninger.

Afsnit I.

5. Euclid begynder med den bekjendte Sætning, hvorpaa Oldtiden har bygget Exhaustionsbeviset, hvorefter han i mere almindelig Form gjentager Sætningerne fra 7de Bog om to Størrelsers største fælles Maal. Efter at han har lært, hvorledes dette findes, kommer den vigtige Sætning 5, der siger, at kommensurable

Størrelser forholde sig som Tal, med de omvendte og modsatte i Sætn. 6, 7 og 8, samt 9 med det interessante Corollarium[1]) angaaende nødvendige og tilstrækkelige Betingelser for Kommensurabilitet og tillige 11 — Theaetets Sætning —, at ere de to første Led i en Proportion kommensurable, ville de to sidste ogsaa være det.

Disse Sætninger give ved Anvendelse af Proportioner Forbindelsen mellem den geometriske Fremstilling, som Euclid gjennemfører i denne Bog, og Tallæren, som er den egentlige Gjenstand for Behandlingen, saaledes at vi heraf i Almindelighed kunne se, om en Størrelse er rational kommensurabel i 1ste eller blot i 2den Potens, og hvorledes vi kunne indføre Nutidens Formler i hans Fremstilling.

Simple Sætninger herom faa vi i Sætn. 12—16.

Sætn. 14 er af mere almindelig Interesse, da den opstiller Størrelser underkastede visse Betingelser, som ere af væsentlig Betydning for de i det følgende behandlede irrationale Størrelser. Den udsiger nemlig: „Dersom 4 Størrelser ere proportionale, og den første potenserer mere end den anden et Kvadrat paa en Størrelse kommensurabel med den første, saa vil den tredie ogsaa potensere mere end den fjerde et Kvadrat paa en Størrelse kommensurabel med den tredie, og hvis den første potenserer mere end den anden et Kvadrat paa en Størrelse inkommensurabel med den, saa vil den tredie ogsaa potensere mere end den fjerde et Kvadrat paa en Størrelse inkommensurabel med den".

En Størrelses Kvadrat er det, som den „potenserer". Naar her tales om det Kvadrat, som en Størrelse a potenserer mere

---

[1]) Sætning 9 taler om Størrelsernes Kvadrater, der forholde sig enten som Kvadrattal —, hvis Størrelserne ere kommensurable i 1ste Potens, — eller ikke som Kvadrattal —, hvis Størrelserne ikke ere kommensurable i 1ste Potens, — og omvendt.

Corollariet angiver da, at Størrelser i 1ste Potens kommensurable altid ere kommensurable i 2den Potens, men at Størrelser i 2den Potens kommensurable ikke nødvendigvis ere kommensurable i 1ste Potens.

end en anden Størrelse b, betyder det Differensen mellem Størrelsernes Kvadrater $a^2 - b^2$ sat lig et Kvadrat c^2.

Er her givet $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ og $a^2 - b^2 = e^2$ og $c^2 - d^2 = f^2$, saa vil $\frac{a}{e} = \frac{c}{f}$ efter Sætningerne VI 22, V 17, V 7 corr. og V. 22, og da vil efter Theaetets Sætning, naar a er kommensurabel eller inkommensurabel med e, ogsaa c være kommensurabel eller inkommensurabel med f.

6. I Sætning 17 og 18 faa vi en Diskussion af Rødderne i 2den Grads Ligningen $ax - x^2 = \frac{b^2}{4}$, idet der undersøges Spørgsmaalet om rationale eller irrationale Rødder, hvad der tydelig viser Rigtigheden af den tidligere omtalte Anskuelse, at Grækerne vare fortrolige med Løsningen af 2den Grads Ligninger i Tal, og at hvad Euclid har givet herom i de geometriske Bøger er en theoretisk Fremstilling af Løsningen.

Sætning 17 siger:

„Er der givet to uligestore Størrelser og Fjerdedelen af Kvadratet paa den mindste anlægges til den største, saa der bliver et Kvadrat til Rest, og denne derved deles i to kommensurable Dele, saa vil den største af de givne Størrelser potensere mere end den mindste et Kvadrat paa en Størrelse i 1ste Potens kommensurabel med den. Og omvendt, hvis den største potenserer mere end den mindste et Kvadrat paa en Størrelse med den i 1ste Potens kommensurabel, saa ville Delene være kommensurable."

De givne Størrelser ere a og b $(a > b)$. Skal da $\frac{b^2}{4}$ anlægges til a, saa der bliver et Kvadrat til Rest, maa $(a - x)\,x = \frac{b^2}{4}$, hvis nu $\frac{a-x}{x} = \frac{\alpha}{\beta}$, saa vil $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\mu}{\nu}$, og omvendt, hvis $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\mu}{\nu}$, saa vil $\frac{a-x}{x} = \frac{\alpha}{\beta}$. [1])

[1]) Vi se her tillige, at Euclid betragter begge Rødder, vel ikke paa den Maade, hvorpaa vi betragte dem, idet han anser Ligningen for to

Efter II 5 vil $(a-x)x+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ og $4(a-x)x+4\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=4\,.\left(\frac{a}{2}\right)^2$ eller $b^2+(a-2x)^2=a^2$, altsaa $(a-2x)^2=a^2-b^2$.

Nu er $\frac{a-x}{x}=\frac{a}{\beta}$, altsaa $\frac{a}{a-2x}=\frac{a+\beta}{a-\beta}$, hvoraf $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{a-2x}{a}=\frac{a-\beta}{a+\beta}=\frac{\mu}{\nu}$.

Omvendt vil man, naar $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\mu}{\nu}$, have $\frac{a}{a-2x}=\frac{\nu}{\mu}$, $\frac{a}{2x}=\frac{\nu}{\nu-\mu}$ og $\frac{a}{x}=\frac{2\nu}{\nu-\mu}$, hvoraf $\frac{a-x}{x}=\frac{\nu+\mu}{\nu-\mu}=\frac{a}{\beta}$.

Dette er Euclids Fremgangsmaade, kun anfører han ikke Talstørrelserne; men af hans hele Kjendskab til Proportioner ved man, at det ikke er, fordi han ikke kan manøvrere dermed, men fordi det ikke er nødvendigt; thi i det foregaaende har han vist Forbindelsen mellem Proportionslæren og Læren om Kommensurabilitet.

Sætn. 18 har samme Indhold som 17, kun maa overalt kommensurabel erstattes med inkommensurabel.

Til Slutning indføres i dette Afsnit endnu rationale 2den Grads Størrelser.

Sætn. 19. „Produktet af to rationale i 1ste Potens kommensurable Størrelser er rationalt.“ Hvis a og b ere rationale i 1ste Potens kommensurable, vil ab ogsaa være rational; thi $\frac{ab}{a^2}=\frac{b}{a}$, men ved disse 2den Grads Størrelser kan der efter den geometriske Betydning ikke blive Tale om rationale i 2den Potens kommensurable.

Sætn. 20. „Dersom en rational 2den Grads Størrelse deles i to Faktorer, hvoraf den ene er rational, vil den anden ogsaa være rational og kommensurabel i 1ste Potens med denne.“

Ligninger med to ubekjendte, nemlig $x+y=a$, $xy=\frac{b^2}{4}$, hvor altsaa hver ubekjendt har sin Værdi.

Sættes $A = ab$, hvor a er rational, vil $\frac{A}{a^2} = \frac{b}{a}$, men $\frac{A}{a^2} = \frac{a}{\beta}$, altsaa $\frac{b}{a} = \frac{a}{\beta}$.

Afsnit II.

7. Disse Sætninger danne Overgangen til dette nye Afsnit; hvor han indfører den simpleste irrationale Størrelse — Medialen — dannet gjennem „Produktet af to rationale kun i 2den Potens kommensurable Størrelser“ i Sætning 21, der siger, at dette Produkt er irrationalt, og at den Størrelse, hvis Kvadrat er lig Produktet, er irrational og kaldes en „Medial“.

Formen for en Medial faas efter ovenstaaende saaledes. To rationale kun i 2den Potens kommensurable Størrelser have Formen $ma\sqrt{\beta}$ og $m\gamma\sqrt{\vartheta}$, deres Produkt er da $m^2 a\gamma\sqrt{\beta\vartheta}$, hvoraf Medialen faar Formen $m\sqrt{a\gamma\sqrt{\beta\vartheta}}$ eller simplere $m\sqrt[4]{a}$. Selve Produktet $m^2\, a\gamma\sqrt{\beta\vartheta}$ eller $m^2\sqrt{a}$ er irrationalt og kaldes et medialt Produkt.

Sætn. 22 indeholder Spaltningen af et medialt Produkt i 2 Faktorer paa samme Maade som Sætn. 20 af det rationale Produkt.

I samme Betydning som vi kunde tale om, at rationale Størrelser indbyrdes vare i 1ste Potens eller kun i 2den Potens kommensurable, kan man her foretage en lignende Inddeling af Medialerne. To i 1ste Potens kommensurable Medialer have Formen $ma\sqrt[4]{\beta}$ og $m\gamma\sqrt[4]{\beta}$, medens to kun i 2den Potens kommensurable Medialer have Formen $ma\sqrt[4]{\beta}$ (eller $m\sqrt{a}\sqrt[4]{\beta}$) og $m\sqrt{\gamma}\sqrt[4]{\beta}$.

Medens Produktet af to rationale, i 1ste Potens kommensurable Størrelser er rationalt, og af to kun i 2den Potens kommensurable, rationale Størrelser er medialt, vil Produktet af to i 1ste Potens kommensurable Medialer blive medialt ($P = ma\sqrt[4]{\beta} \,.\, m\gamma\sqrt[4]{\beta} = m^2\, a\gamma\sqrt{\beta}$), og af to kun i 2den Potens kommensurable Medialer enten medialt eller rationalt ($P = m\sqrt{a}\sqrt[4]{\beta} \,.\, m\sqrt{\gamma}\sqrt[4]{\beta} = m^2\sqrt{a\beta\gamma}$, der bliver rationalt, naar $a\beta\gamma$ er et Kvadrattal).

I Sætning 27 og 28 finder Euclid Formen for saadanne Medialer.

8. Vi ere nu naaede til Sætn. 26, der viser, at Differensen mellem to mediale Produkter ikke kan være rational.

De to mediale Produkter kunne skrives som cp og cq, hvor

c og p samt c og q ere rationale, kun i 2den Potens kommensurable. Differensen er da $c(p - q)$. Skal denne være rational, maa $p - q$ være rational i 1ste Potens kommensurabel med c, medens p og q selv ere kun i 2den Potens kommensurable med c.

Opgaven bliver da at bevise, at Differensen mellem to Kvadratrødder ikke er rational. Sætte vi $p' = c\sqrt{\alpha}$ og $q = c\sqrt{\beta}$, skal man vise, at

$$c\sqrt{\alpha} - c\sqrt{\beta} \text{ ikke kan være lig } c\gamma \text{ (eller } c\sqrt{\gamma})$$

Uden at fravige Aanden i Euclids Bevis kan man opstille det under følgende Form.

Hvis $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \gamma$, vil man have $\sqrt{\alpha} = \gamma + \sqrt{\beta}$ og $\alpha = \gamma^2 + \beta + 2\gamma\sqrt{\beta}$, hvor $\gamma^2 + \beta$ er rational og $2\gamma\sqrt{\beta}$ irrational. Heraf faas $\frac{\alpha}{\gamma^2 + \beta} = \frac{\gamma^2 + \beta + 2\gamma\sqrt{\beta}}{\gamma^2 + \beta}$, her kan det første Forhold udtrykkes ved Tal, men det sidste ikke, derfor kan man ikke have $\gamma = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$. Naar undtages den sidste Division, som følger af Euclids særegne Udtryksmaade, er Beviset fuldstændig det samme, som man vilde bruge i en moderne Mathematik.

9. Efter som allerede nævnt i Sætn. 27 og 28 at have fundet Formerne for 2 kun i 2den Potens kommensurable Medialer, hvis Produkt er rationalt eller medialt, bliver Spørgsmaalet for det følgende at finde Formen for Kvadrattal, hvis Sum er kvadratisk eller ikke kvadratisk, hvilket sker i Lemma 1 og 2 efter Sætn. 28.

Euclid benytter Sætn. 6 af 2den Bog, der udsiger $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Det gjælder da at vælge a og b saaledes, at ab er et Kvadrattal, og at $\frac{a+b}{2}$ er et helt Tal.

Betingelsen bliver da, at a og b ere ligedannede plane Tal (ɔ: skulle forholde sig som Kvadrattal) og desuden at a og b samtidig skulle være lige eller ulige.

Udtrykkes a og b ved vilkaarlige Tal faas

I for a og b lige, $a = 2\alpha m^2$

$b = 2\alpha n^2$, hvoraf de søgte Tal x, y, z ($x^2 + y^2 = z^2$)

$x = 2\alpha mn$, $y = \alpha(m^2 - n^2)$, $z = \alpha(m^2 + n^2)$, og

II for a og b ulige, $a = \alpha(2m + 1)^2$

$b = \alpha(2n + 1)^2$, hvoraf

$x = \alpha(2m + 1)(2n + 1)$, $y = 2\alpha(m - n)(m + n + 1)$ og

$z = 2\alpha(m^2 + n^2 + m + n) + \alpha$.

Dette sidste Sæt Værdier er indbefattet i det første, naar man for $m - n$ sætter n og for $m + n + 1$ sætter m.

Skjønt disse Formler saaledes kunne samles til en, er det dog naturligt, at de ere skilte ad. Vi have nemlig fra Pythagoras og Platon faaet overleveret to saadanne, nemlig fra Pythagoras Værdierne $2n + 1$, $\frac{(2n + 1)^2 - 1}{2}$ og $\frac{(2n + 1)^2 + 1}{2}$, et Sæt Værdier, som han gjennem en enkelt Gnomon let erholdt, og fra Platon følgende $2n$, $n^2 - 1$, $n^2 + 1$, som han ogsaa kunde faa gjennem en Gnomon, men en dobbelt. Begge Rækker ere indbefattede i Euclids.

Ved Benyttelse af de samme Værdier for x, y og z faas to Kvadrattal, hvis Differens er et Kvadrattal.

Naar Euclid dernæst i Lemma 2 opstiller Opgaven at finde to Kvadrater, hvis Sum eller Differens ikke er kvadratisk, er det kun hans Hensigt at paavise en Form for saadanne, som han kan benytte i det følgende.

10. Vi komme nu til en Række Sætninger, der forberede Løsningen af 4de Grads Ligningen, som det er Formaalet at naa i denne Bog.

Sætn. 29. At finde to rationale kun i 2den Potens kommensurable Størrelser, saaledes at Differensen mellem deres Kvadrater er lig Kvadratet paa en med den største i 1ste Potens kommensurabel Størrelse.

Det, som Euclid vil i denne Sætning og de følgende af samme Art, er at finde et Udtryk for den ene ved den anden, saaledes at den opstillede Betingelse er tilfredsstillet.

Han søger Størrelser af Formen $x = m\sqrt{\alpha}$ og $y = m\sqrt{\beta}$, saaledes at $\frac{x^2 - y^2}{x^2} = \mu^2$.

Antage vi den ene Størrelse at være a, og antage vi $\frac{a^2}{x^2} =$

$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}$, hvor α^2 og β^2 ere Kvadrattal, hvis Differens ikke er et Kvadrattal, vil a og x være kun i 2den Potens kommensurable og $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, saaledes at den anden Betingelse ogsaa er opfyldt.

Man kan da udtrykke x ved a saaledes: $x = a\sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}} = a\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}$ eller kortere $x = a\sqrt{1 - \alpha^2}$, hvor $1 - \alpha^2$ ikke er kvadratisk.

Man kan naturligvis ogsaa faa Udtrykket, som Nesselmann har det i Algebra der Griechen ved Linier b og c i Stedet for Tal α og β, uden at det gjør nogen Forskjel, men Euclid selv benytter Tal hentede fra det ovennævnte Lemma 2.

Erstatte vi i den opstillede Betingelsesligning μ^2 med μ, faas Sætn. 30, der giver Formen $x = a\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Spørge vi nu, hvorledes Euclid har faaet sin Løsning, behøve vi blot at vende Fremstillingen om. Han maa da begynde med at opstille Ligningen $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, hvoraf $\frac{a^2}{x^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}$. Skal her a og x være kun i 2den Potens kommensurable, maa $\alpha^2 - \beta^2$ ikke være kvadratisk, derfor begynder han sin Fremstilling med at vælge to saadanne Kvadrattal og da gaa frem som ovenfor.

I Sætning 31 a og 31 b findes Medialer med rationalt Produkt, underkastede samme Betingelser, og man faar i 31 a Formerne $x = a\frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt[4]{1 - \alpha^2}}$ og $y = a\sqrt{1 - \alpha^2}\sqrt[4]{1 - \alpha^2}$ og i 31 b $x = a\sqrt[4]{\frac{1}{1 + \alpha^2}}$ og $y = a\sqrt{\frac{1}{1 + \alpha^2}}\sqrt[4]{\frac{1}{1 + \alpha^2}}$.

Endvidere gjentages det samme i Sætn. 32 a og 32 b for Medialer med medialt Produkt, hvilket fører til

$$x = a\sqrt[4]{\beta} \text{ og } y = a\sqrt[4]{\beta}\sqrt{1 - \alpha^2} \text{ i 32 a og}$$

$$x = a\sqrt[4]{\beta} \text{ og } y = a\sqrt[4]{\beta}\sqrt{\frac{1}{1 + \alpha^2}} \text{ (eller } a\sqrt[4]{\beta}\sqrt{1 - \alpha}) \text{ i 32 b.}$$

11. I de følgende 3 Sætninger komme vi nu til Ligningerne

$$x^2 + y^2 = A,$$
$$xy = B,$$

hvor A og B ere underkastede visse Betingelser, nemlig

1) i Sætn. 33 $A = a^2$

$$B = \frac{a^2 \sqrt{1 - a}}{2},$$

2) i Sætn. 34 $A = a^2 \sqrt{1 - a}$

$$B = a^2 \sqrt{1 - a} \, \frac{\sqrt{1 - a}}{2} \quad \text{og}$$

3) i Sætn. 35 $A = a^2 \sqrt{\beta}$

$$B = a^2 \sqrt{\beta} \, \frac{\sqrt{1 - a}}{2}.$$

Til Hjælp til Løsningen af disse Ligninger har Euclid opstillet de bekjendte Sætninger om Stykkerne i den retvinklede Trekant i et Lemma før Sætn. 33.

Vi kunne da give Opgaven den geometriske Form: „At finde Katheterne i en retvinklet Trekant, naar man kjender Hypothenusen og Arealet."

Kalde vi Hypothenusen c og Højden h, samt Stykkerne af Hypothenusen p og q, have vi

$$x^2 + y^2 = c^2 = A,$$
$$xy = ch = B,$$

af den sidste faas h, hvorefter p og q findes af Ligningerne $p + q = c$, $pq = h^2$, der give p og q gjennem 2den Grads Ligningen i Sætning 21, VI Bog. Deraf findes x og y, idet $x^2 = cp$ og $y^2 = cq$.

Vi kunne nu let se, af hvilken Beskaffenhed x og y maa blive, da vi i Sætn. 17 og 18 have set Diskussionen af den benyttede 2den Grads Ligning.

Euclid faar da, for at x og y skulle være inkommensurable (i 2den Potens), at a og β ogsaa maa være inkommensurable, men derved faas gjennem Sætn. 18 de Betingelser, som de givne Størrelser A og B maa være underkastede, saaledes at man faar de ovennævnte Former.

Disse føre til følgende Udtryk for x og y:

1) i Sætn. 33 $x = a\sqrt{\frac{1+\sqrt{a}}{2}}$

$y = a\sqrt{\frac{1-\sqrt{a}}{2}}$,

2) i Sætn. 34 $x = a\sqrt[4]{1-a}\sqrt{\frac{1+\sqrt{a}}{2}}$

$y = a\sqrt[4]{1-a}\sqrt{\frac{1-\sqrt{a}}{2}}$ og

3) i Sætn. 35 $x = a\sqrt[4]{\beta}\sqrt{\frac{1+\sqrt{a}}{2}}$

$y = a\sqrt[4]{\beta}\sqrt{\frac{1-\sqrt{a}}{2}}$.

12. Vi have gjennem dette Afsnit faaet en Samling forskjellige irrationale Former, som nu skulle underkastes en nærmere Undersøgelse, hvilket sker i 3die og 4de Afsnit, hvorved tillige naas en Diskussion af Ligningerne

$$x^2 + y^2 = A,$$
$$xy = B,$$

af hvilken dog kun de Tilfælde, der give irrationale Rødder, have Interesse i denne Bog.

Som alt nævnt er Forskjellen mellem 3die og 4de Afsnit kun den, at hvor der i 3die Afsnit adderes, der subtraheres i 4de Afsnit, vi betragte dem derfor samtidig, idet endvidere Afsnittene deles i en Række Underafdelinger, hver paa 6 Sætninger — Hexader.

Afsnit III og IV.

13. 1ste Hexade (Sætn. 36—42, 73—79) definerer de 6 Hovedarter af sammensatte irrationale toleddede Størrelser, nemlig

1) Binomial (Apotom ved Subtraktion) af to rationale kun i 2den Potens kommensurable Størrelser. Formen bliver $m(\sqrt{a} \pm \sqrt{\beta})$.

2) 1ste Bimedial (1ste Medialapotom) af to Medialer kun i 2den Potens kommensurable, med rationalt Produkt.

$$m\sqrt[4]{\frac{\beta}{a}}(\sqrt{\beta} \pm \sqrt{a}).$$

3) 2den Bimedial (2det Medialapotom) faas, naar Produktet bliver medialt $m\sqrt[4]{\frac{a}{\beta}}(\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma})$.

4) Størst irrational (mindst irrational) dannet af to i 2den Potens inkommensurable Størrelser, hvis Kvadraters Sum er rational, og hvis Produkt er medialt. Det er Størrelser af Formen i Sætn. 33, de to nævnte Arter ere paa samme Maade dannede ved Hjælp af Sætn. 34 og 35. Formen bliver

$$a\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{a}}{2}} \pm \sqrt{\frac{1-\sqrt{a}}{2}}\right).$$

5) Den rationalt og medialt potenserende (den med rationalt medialt dannende) af Formen

$$a\sqrt[4]{1-a}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{a}}{2}} \pm \sqrt{\frac{1-\sqrt{a}}{2}}\right).$$

Navnet fremgaar af, at Kvadratet (det, som Størrelsen potenserer) er en Sum (Differens) af et medialt og rationalt Kvadrat.

6) Den to mediale potenserende (den med medialt medialt dannende) af Formen

$$a\sqrt[4]{\beta}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{a}}{2}} \pm \sqrt{\frac{1-\sqrt{a}}{2}}\right).$$

14. I anden Hexade (Sætn. 42—48, 79—85) paavises, at ingen af disse irrationale Størrelser paa mere end en Maade kan betragtes som dannet af to Led, altsaa at $m(\sqrt{a}+\sqrt{\beta}) = m(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta})$ er umulig. I Forbindelse hermed staar 6te Hexade (Sætn. 66—71, 103—108), hvor der paavises, at en Størrelse kommensurabel med en af disse Arter selv er af denne Art.

15. Binomialernes og Apotomernes Led kunne nu underkastes visse Betingelser, hvorved faas 6 forskjellige Binomialer og Apotomer.

Disse Betingelser hidrøre fra Diskussionen af 2den Grads Ligningen, idet Binomialer og Apotomer fremkomme som Rødder i denne, medens Rødderne i de nævnte 4de Grads Ligninger fremkomme som Kvadratrødder af disse.

Betragte vi et Binomial (Apotom) af Formen $a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$, bliver Spørgsmaalet om a's og b's Beskaffenhed.

Fælles for de 3 første Binomialer (Apotomer) er, at b er kommensurabel med a, medens i de 3 sidste b er inkommensurabel med a.

Dernæst er i det 1ste og 4de a rational kommensurabel med Enheden,

i 2det og 4de er $\sqrt{a^2 - b^2}$, men ikke a, kommensurabel med Enheden, og

i 3die og 6te er intet af Leddene kommensurabelt med Enheden.

Vi se her tillige Betydningen af Sætn. 29 og 30.

Man har da følgende Former:

1ste Binomial (Apotom) $m\,(a \pm \sqrt{a^2 - \beta^2})$,

2det $m\,\gamma\left(\sqrt{\dfrac{a^2}{a^2 - \beta^2}} \pm 1\right)$,

3die $m\,\sqrt{\gamma}\,(a \pm \sqrt{a^2 - \beta^2})$,

4de $m\,(a \pm \sqrt{a^2 - \beta})$,

5te $m\gamma\left(\sqrt{\dfrac{a^2}{a^2 - \beta}} \pm 1\right)$,

6te $m\,\sqrt{\gamma}\,(\sqrt{a} \pm \sqrt{a - \beta})$ eller

$m\,\sqrt{\gamma}\,(a \pm \sqrt{a^2 - \beta})$.

Disse Former findes af Euclid i 3die Hexade (Sætn. 48—54, 86—91).

16. I 4de Hexade (Sætn. 54—60, 91—97) læres Kvadratrodsuddragning af Binomialer (Apotomer). Naturligvis udtrykker Euclid ikke Sætningerne saaledes, men det er berettiget at kalde det saaledes, da Sætningerne overførte i vort algebraiske Sprog virkelig give en saadan, og af den hele Sammenhæng med Ligningen af 4de Grad fremgaar det, at disse Sætninger ogsaa for Euclid har denne Betydning. Vi erindre, at i Sætn. 33, 34, 35 fandt han $x^2 = cp$, hvor p er et Binomial. Sætningerne fremkomme under den Form, at der søges Siden i et Kvadrat lig Rektanglet dannet af et Binomial (Apotom) og en rational Størrelse.

I Sætn. 54 søges x, naar $x^2 = m\gamma \,.\, m\,(a + \sqrt{a^2 - \beta^2})$.

Ved Løsningen tænker Euclid sig x delt i to Dele y og z, saaledes at $x = y + z$, da er

$$x^2 = y^2 + z^2 + 2yz = m^2 \alpha\gamma + m^2 \gamma \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Da nu y og z maa være rationale, men inkommensurable, kunne vi sætte Kvadraternes Sum lig det rationale Led og Produktet lig det irrationale, da Kvadraternes Sum maa være størst, altsaa

$$y^2 + z^2 = m^2 \alpha\gamma,\quad yz = \frac{1}{2} m^2 \gamma \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}.$$

For at løse disse Ligninger gaar han frem som vist ved Sætn. 33, hvorved faas

$$x = y + z = m\sqrt{\gamma \frac{\alpha + \beta}{2}} + m\sqrt{\gamma \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

Under selve Løsningen af Ligningerne kunne vi se, at Resultatet bliver et Binomial, thi sættes $y^2 = m^2 \gamma u$ og $z^2 = m^2 \gamma (\alpha - u)$, vil $u(\alpha - u) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2$, hvilket giver at u og $\alpha - u$ ere rationale og kommensurable (efter Sætn. 17), hvorved y og z ogsaa maa være rationale, men inkommensurable.

Paa samme Maade gjennemføres Regningerne for de øvrige Binomialer (Apotomer), og ligesom her ses der under Regningerne Resultaternes Art.

Vi skulle blot anføre disse Resultater. Kvadratroden af 1ste—6te Binomial er henholdsvis et Binomial, 1ste og 2den Bimedial, størst irrational, den rationalt og medialt potenserende og den to mediale potenserende, og for Apotomerne de tilsvarende.

Resultaterne fremstilles i følgende Ligninger:

$$m\gamma \,.\, m(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \left[m\left(\sqrt{\gamma \frac{\alpha + \beta}{2}} \pm \sqrt{\gamma \frac{\alpha - \beta}{2}}\right)\right]^2.$$

$$m\gamma \,.\, m\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}} \pm 1\right) = \left[m\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{2}}\left(\sqrt[4]{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} \pm \sqrt[4]{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}}\right)\right]^2,$$

$$m\delta \,.\, m\sqrt{\gamma}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) = \left[m\sqrt[4]{\gamma}\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}(\alpha + \beta)} \pm \sqrt{\frac{\delta}{2}(\alpha - \beta)}\right)\right]^2,$$

$$m\gamma \,.\, m(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}) = \left[m\left(\sqrt{\frac{\gamma(\alpha + \sqrt{\beta})}{2}} \pm \sqrt{\frac{\gamma(\alpha - \sqrt{\beta})}{2}}\right)\right]^2,$$

$$m\delta \, . \, m\gamma\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta}} \pm 1\right) =$$

$$\left[m\sqrt[4]{\alpha^2-\beta}\sqrt{\frac{\gamma\delta}{\alpha^2-\beta}}\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\beta}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\alpha-\sqrt{\beta}}{2}}\right)\right]^2,$$

$$m\delta \, . \, m\sqrt{\gamma}(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha-\beta}) = \left[m\sqrt{\delta\sqrt{\gamma}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{2}}\right)\right]^2$$

17. Næste Afsnit — 5te Hexade (Sætn. 60—66, 97—103) — bliver en Omvending af disse Resultater, og det lærer, at Kvadratet paa en af de 6 Arter af sammensatte irrationale Størrelser bliver et af Binomialerne (Apotomerne)[1].

Selve Bevisførelsen ved disse omvendte Sætninger er der ingen Anledning til at gaa videre ind paa. Kun skal endnu bemærkes om disse to Afsnit, at den rationale Faktor $m^2\gamma$ ($m^2\delta$) kunde udelades, og man fik da Kvadratrodsuddragning af Tal i Stedet, men den er bibeholdt for at kunne læse Euclids Udtryk af Formlerne, som de ere opstillede.

18. I sidste Afsnit — 7de Hexade — gives en samlet Oversigt over Frembringelsen af disse forskjellige irrationale Størrelser.

Sætn. 71. „Dersom et rationalt og medialt 2den Grads Produkt adderes, vil Størrelsen, hvis Kvadrat er lig Summen, være en af de 4 irrationale Størrelser, nemlig Binomial, 1ste Bimedial, størst irrational eller den rationalt og medialt potenserende“, hvilket fremgaar af 4de Hexade.

Sætn. 72 fortsætter dette saaledes: „Adderes to mediale 2den Grads Produkter, vil Størrelsen, hvis Kvadrat er lig Summen, være enten 2den Bimedial eller den to mediale potenserende.

I Sætn. 108, 109 og 110 udsiges det samme for de ved Subtraktion dannede Størrelser, idet det for disse bliver nødvendigt at tage 3 Sætninger, da der maa skjelnes mellem de to Tilfælde, om det mediale er mindre eller større end det rationale Led.

For at afslutte Paavisningen fra 2den og 6te Hexade om

---

[1]) **Sætningerne maa da fremtræde under den Form, at Kvadratet paa en af de irrationale Størrelser er lig Rektanglet paa en rational Størrelse og paa et Binomial (Apotom).**

disse irrationale Størrelsers Berettigelse ved Siden af hinanden, staar der kun tilbage at paavise, at de ved Addition dannede Størrelser ikke kunne være sammenfaldende med de ved Subtraktion dannede, dette sker i Sætn. 111.

19. Resten af Bogen, som Dr. Heiberg vel har ladet følge efter de øvrige Sætninger, men om hvis Ægthed han nærer Tvivl (Se Vol. V af hans Udgave), ere spredte Sætninger, som gaa ud paa at vise, at Produktet af to sammensatte irrationale Størrelser kan være rationalt, nemlig Produktet af et Binomial og et Apotom med kommensurable proportionale Led. Her skal ikke tales nærmere om disse Sætninger, om hvilke dog maa siges, at de selvfølgelig ikke ligge udenfor, hvad Euclid kunde præstere og maaske ogsaa har kjendt, men de ligge lidt udenfor Formaalet med denne Bog, der er knyttet til 4de Grads Ligningen og dens Diskussion.

Hermed er altsaa denne Bog afsluttet, efter at Behandlingen af disse irrationale Størrelser, som Euclid har foresat sig, er afsluttet; men der er ingen Tvivl om, at han kunde have fortsat med Størrelser af næste Art dannede af flere og af nye Led, der rimeligvis har været Gjenstand for Apollonius algebraiske Arbejder (Se Woepcke: Restitution des travaux d'Apollonius. Mémoires de l'acad. prés. par divers savants XIV, 1856 Paris).

Kap. II. Forbindelsen mellem Euclids irrationale Størrelser og Ligningernes Theori.

30. Paa Euclids Tid og tidligere endnu beskjæftigede Mathematikerne sig med Løsning af Ligninger, vel simplere, hovedsagentlig 2den Grads Ligninger, men de allerede omtalte Ligninger af højere Grad, som Euclid betragter her i 10ende Bog, føre til mere sammensatte irrationale Udtryk, saa det bliver ønskeligt at faa en samlet Oversigt over de Former, der kunne opstaa, og tillige en Undersøgelse af deres Egenskaber, og det er det, som Euclid har foresat sig her i denne Bog. Han var godt bevandret i Ligningernes Theori, som man let overbeviser sig om. Han har saaledes

i 2den og 6te Bog 2den Grads Ligningen og i Data desuden Ligningerne $xy = A$, $x^2 = my^2 + B$, samt her i 10ende Bog $xy = A$, $x^2 + y^2 = B$.

21. Fremstille vi Ligningen af 2den Grad paa Formen $x(a - x) = b$, faa Rødderne Formen $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$, hvis Beskaffenhed undersøges i Sætn. 17, 18. Blive de irrationale, faa vi Binomialet og Apotomet, der saaledes dannes af 2 rationale, kun i anden Potens kommensurable Størrelser.

Vi kunne her endnu tilføje, at Medialen er disses Mellemproportional.

Inddelingen af Binomialer og Apotomer i 6 Arter hidrører fra 2den Grads Ligningens forskjellige Former samt fra Spørgsmaalet om Beskaffenheden af a og b og er ikke, som Nesselmann mener, aldeles vilkaarlig kun retfærdiggjort ved Sammenhængen med de øvrige Arter af irrationale Størrelser.

Betragte vi nu Størrelsen $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$, se vi, at dens to Leds Kvadraters Differens er b. Det er derfor naturligt, at Euclid først undersøger Størrelser, hvis Kvadraters Differens er underkastet visse Betingelser, og finder disses Former.

Opstille vi Betingelsen fra Sætn. 29 $\frac{x^2 - y^2}{x^2} = \mu^2$ og spørge om Formerne for x og y, naar de skulle være rationale, kun i 2den Potens kommensurable, fører dette til

1) $x = m\alpha$, $y = m\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, hvis den største skal være rational i 1ste Potens kommensurabel med Enheden.

2) $x = m\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$, $y = m\alpha$, hvis den mindste skal være det[1]).

---

[1]) At der bliver Anledning til dette Tilfælde ligger dels i, at i den nævnte Form for 2den Grads Ligningen kan $\frac{a}{2}$ være irrational, medens $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ kan være rational (i vor Forstand), og dels i at Ligningen af 2den Grad fremtræder under Formen $x(a + x) = b$, eller $x(x - a) = b$, (disse Former ere i Virkeligheden den samme), der har til positive Rødder $\sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \pm \frac{a}{2}$ (de negative kjender Euclid ikke).

3) $x = m\,a\sqrt{\gamma},\; y = \sqrt{\gamma}\sqrt{a^2 - \beta^2}$, hvis ingen af dem skal være det[1]).

Endvidere faa vi i Sætn. 30 samme Spørgsmaal, hvor μ^2 erstattes med μ. Dette fører til følgende 3 Former.

1) $x = ma,\; y = m\sqrt{a^2 - \beta}$.

2) $x = m\sqrt{\dfrac{a^2}{a^2 - \beta}},\; y = m$.

3) $x = m\,a\sqrt{\gamma},\; y = m\sqrt{\gamma}\sqrt{a^2 - \beta}$.

Vi faa derved de 6 Binomialer og Apotomer frem ved at danne $x \pm y$, eller de 6 forskjellige Former for irrationale Rødder i 2den Grads Ligningen efter a's og b's Beskaffenhed.

Her skal blot bemærkes, at dette er det samme Ræsonnement, som Tannery (Mém. Bordeaux, 2. Ser., Tom. IV.) og Woepcke (Mém. de l'Acad. Paris 1856. Tom. XIV) have benyttet, dog maa det siges, at den sidste ikke lader Forbindelsen med 2den Grads Ligningen træde frem, hos ham er Grundlaget som hos Nesselmann vilkaarligt.

22. Vi gaa nu over til de andre Arter irrationale Størrelser og faa da her igjen Binomialet og Apotomet med og ville begynde med at benytte os af de af Euclid opstillede Ligninger $x^2 + y^2 = A$, $xy = B$ (Sætn. 33—35) for deraf at faa Formen for A og B og derigjennem Røddernes Former.

Her optræder under disse Betingelser to Grupper Størrelser, nemlig

I) x og y i 2den Potens kommensurable, og II) x og y inkommensurable, og indenfor hver Gruppe falder 3 Tilfælde.

a) A rational. B medial. b) A medial. B rational. c) A og B mediale. men inkommensurable.

I. Vi have $\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{\mu}{\nu}$, hvoraf $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2} = \dfrac{\mu - \nu}{\mu}$ og $\dfrac{x^2}{xy} = \dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu}} = \dfrac{\mu}{\sqrt{\mu\nu}}$, $\dfrac{x^2 - y^2}{xy} = \dfrac{\mu - \nu}{\sqrt{\mu\nu}}$.

---

[1]) Dette Tilfælde indtræder. naar $\dfrac{a}{2}$ og $\sqrt{\dfrac{a^2}{4} - b}$ ere irrationale i vor Forstand.

Heraf faa vi de tre Tilfælde,

a) idet $x^2 + y^2 = A$ rational, og $xy = B$ medial,

Formen for $A = \mu + \nu$, $B = \sqrt{\mu\nu}$.

b) A medial, B rational,

Formen $A = (\mu + \nu)\sqrt{\mu\nu}$, $B = \mu\nu$.

c) A og B mediale, men inkommensurable,

$$\text{Formen } A = \sqrt{\mu + \nu},\ B = \sqrt{\frac{\mu\nu}{\mu + \nu}}.$$

II. Skal x^2 og y^2 være inkommensurable, faas

a) idet A rational, B medial. Formen $A = a$. $B = \sqrt{b}$,

b) A medial, B rational. Formen $A = \sqrt{a}$, $B = b$,

c) A og B mediale, men inkommensurable, Formen $A = \sqrt{a}$. $B = \sqrt{b}$.

Heraf opstaar nu ved Dannelsen af $x \pm y$ under de forskjellige Betingelser, som A og B ere underkastede, de 6 Arter irrationale Størrelser, nemlig

1) I a) $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$ med Navn Binomial, Apotom.

2) b) $\sqrt{m\sqrt{mn}} \pm \sqrt{n\sqrt{mn}}$, 1ste Bimedial, 1ste Medialapotom.

3) c) $\sqrt{\frac{m}{\sqrt{m+n}}} \pm \sqrt{\frac{n}{\sqrt{m-n}}}$,

2den Bimedial, 2det Medialapotom.

4) II a) $\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$.

den største irrationale, mindste irrationale.

5) b) $\sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a - 4b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a - 4b^2}}{2}}$,

den rationalt og medialt potenserende, den med rationalt medialt dannende.

6) c) $\sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a - 4b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a - 4b}}{2}}$,

den to mediale potenserende, den med medialt medialt dannende.

23. Efter nu at have set Dannelsen af de forskjellige Former for irrationale Størrelser, skulle vi blot vise, hvorledes Euclid ved

et simpelt Raisonnement kommer til Kvadratrodsuddragningens Resultater.

Af Ligningerne $x^2 + y^2 = A$ og $xy = B$ dannedes af $x \pm y$ de 6 Arter irrationale Størrelser, men $x \pm y$ eller rettere $(x \pm y)^2$ — Arealet, som potenseres af $x \pm y$ — kunne vi ogsaa faa ad anden Vej, idet $(x \pm y)^2 = A \pm 2B$, eller $x \pm y$ potenserer et Areal lig et Binomial eller Apotom. Søges nu Siden i det Kvadrat, hvis Areal er lig et Binomial eller Apotom, faas $x \pm y$, som er vist at være de ovenfor fundne irrationale Størrelser, hvilken af dem det er, afhænger af de Betingelser, som A og B ere underkastede.

Ogsaa Navnene for $x \pm y$ vise, at Euclid har lagt en saadan Betragtning til Grund, II b hedder den rationalt og medialt potenserende, thi $A + 2B$ er medial + rational, og $A - 2B$ er i dette Tilfælde den, der forøget med rationalt ($2B$) giver et medialt Led (A). For II c er Navnet af samme Art, medens Grunden til Navnet for II a er uklar. Navnene for I a, b, c ligge lige for.

24. Tilbage staar nu at vise, hvorledes Euclids Løsning af Ligningerne $x^2 + y^2 = A_1$, $xy = B$ viser sig i vore Tegn. Vi have allerede haft Lejlighed til at nævne og anvende hans Løsning geometrisk, men skulle nu opstille den i algebraisk Form.

Vi ændre de bekjendte Led A og B, saaledes at de faa Formen ab og ad. Ligningerne blive da

$$x^2 + y^2 = ab,$$
$$xy = ad.$$

Da $x^2 + y^2$ skal være lig Rektanglet ab, lægges x^2 henad a og faar Bredden u, og y^2 faar paa samme Maade Bredden $b - u$. ɔ:

Man sætter $x^2 = au$, $y^2 = a(b - u)$, da vil

$$u(b - u) = d^2.$$

den sædvanlige Form for 2den Grads Ligningen, hvor u bliver et Binomial og $b - u$ et Apotom, hvis Nummer i Rækken bestemmes af b og d. x og y fremkomme da ved Kvadratrodsuddragning netop under den Form, hvori Euclid har dem i Sætn. 54—60, 91—97.

25. Vi have saaledes faaet dannet en Sammenhæng mellem de forskjellige Arter irrationale Størrelser og de Ligninger, som

Euclid behandler, og set, at hans i denne Bog behandlede irrationale Størrelser ikke ere vilkaarlige, men bestemte ved den Brug, som han har for dem, idet de give alt, hvad der er nødvendigt og tilstrækkeligt til en omhyggelig Undersøgelse af de Ligninger, som han har foresat sig at behandle.

Er man først saa vidt i Behandlingen af irrationale Størrelser som Euclid, ligger det nær at fortsætte med en særlig Behandling af andre irrationale Størrelser, hvis Existens ikke er ham ubekjendt — Sætn. 115 —, og som Apollonius har gjort det i et tabt Arbejde (Woepcke).

26. Vi have her set, hvilket beundringsværdigt Arbejde Euclid har udført i denne Bog, udelukkende støttet paa Spørgsmaalet om Kommensurabilitet og idet han kun har rette Linier at se paa, hvor den ene synes lige saa god som den anden, medens vi have vore Formler, men ganske vist ikke hans exakte geometriske Ræsonnementer, der ved den Lethed, hvormed han udfører Arbejdet, viser os den geometriske Fremstillings Overlegenhed over den algebraiske, skjønt denne viser Egenskaberne frem ved første Øjekast paa vore Udtryk. Ved denne mesterlige Fremstilling kommer Euclids 10ende Bog til at staa som et af de bedste Exempler paa, hvor vidt de græske Mathematikere kunde bringe det uden vort Tegnsprog [1]).

OM PLANERS BEDÆKNING VED HJÆLP AF ET SYSTEM AF REGULÆRE n-KANTER.

(AF AAGE WIUFF-PETERSEN).

Tænker man sig i en Plan konstrueret en regulær n-Kant, paa hver af dennes Sider konstrueret en dermed kongruent, paa hver af disse Sider igjen nye o. s. v. i det uendelige, vil Planen som bekjendt være dækket af et enkelt Lag Polygoner, naar man

[1]) Det behøver næppe at bemærkes, at nærværende Artikel ikke er en umiddelbar Gjengivelse af Forf.'s af Universitetet prisbelønnede Arbejde om samme Emne, hvad den da heller ikke giver sig ud for at være.
Red.

har $n = 3$, 4 og 6, altsaa naar Polygonvinklen gaar et helt Antal Gange op i $4R$.

Gaa Polygonvinklerne derimod kun et helt Antal Gange op i $4nR$, ville Polygonerne falde ind i hinanden og dække hinanden. Det kunde derfor være af Interesse at undersøge, om Polygonerne, hvis man tænker sig dem gaaende ind under hinanden i et Lag af Planer, og den sidste Polygonkant faldende sammen med den første — ligesom ved de Riemann'ske Flader — om de da for andre Sideantal end de ovenfor nævnte kunne dække, med deres Arealer, et endeligt Antal Lag af Planer.

Tænke vi os saaledes en regulær Ottekant lagt til Grund for et saadant System, kan man, da Polygonvinklen er $\frac{3}{2}R.$, lægge 8 Ottekanter om et Hjørne i 3 Lag. Er Polygonen en n-Kant kan man paa samme Maade lægge $2n$ n-Kanter i $n-2$ Lag.

Undersøgelsen falder lettest, naar vi betragte Centrerne for Polygonerne.

Gaa vi ud fra Centrum for en Polygon, ville Centrerne for Polygoner med en Side fælles med denne, ligge i Endepunkterne af n lige lange Linier, udgaaende fra det første Centrum, og som dele Omdrejningen i n lige store Dele.

Hvert af disse n Centrer bestemmer igjen paa samme Maade $n-1$ nye o. s. v.

Den stillede Opgave kan nu formuleres saaledes:

„Kan man i et saadant Straalesystem altid finde en Vej, saa at man fra et Centrum kan komme til et andet, uendelig nært ved det første?" (Heraf følger nemlig at Planernes Antal bliver uendeligt).

Lægger man x-Axen lodret paa Midten af en Polygonside og Begyndelsespunktet i et af Centrerne, ville de n Retninger, som danne Vejene i Systemet, danne Vinklerne

$$0.\frac{4}{n}R,\ 2.\frac{4}{n}R, \ldots (n-1).\frac{4}{n}R$$

med Axen.

Kalder man nu Antallet af Veje, gjennemløbne i de n Retninger for l_1, l_2, l_3 o. s. v., hvor altsaa l_1, l_2 ... ere hele Tal, vil en Vej, projiceret paa de to Axer, have Størrelsen

$$l_1 + l_2 \cos a + l_3 \cos 2a \ldots + l_n \cos (n-1) a \qquad (1)$$

og

$$l_2 \sin a + l_3 \sin 2a \ldots + l_n \sin (n-1) a \qquad (2)$$

Det gjælder nu om at undersøge, i hvilke Tilfælde disse to Størrelser kunne sættes lig ε og ε_1, hvor ε og ε_1 ere uendelig smaa Størrelser.

Som bekjendt kan (1) og (2) altid skrives som hele, rationale Funktioner af $\cos a$ og $\sin a$ [1]) og kunne derfor udtrykkes ved en rational + en irrational Størrelse, men en saadan kan altid ved et passende Valg af de hele Tal l_1, l_2 o. s. v. sættes lig en lille Størrelse ε.

Saaledes har man for Ottekanten

$$l_1 + l_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \varepsilon,$$

hvilken Ligning er tilfredsstillet, naar man sætter

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} + \varepsilon, \; l_2 = 2q \text{ og } l_1 = -p,$$

og hvor $\frac{p}{q}$ er en passende Konvergent til $\sqrt{2}$, udviklet i Kædebrøk. Den eneste Undtagelse er altsaa det Tilfælde, hvor $\cos a$ er rational, og hvor paa samme Tid a gaar et helt Antal Gange op i $4nR$.

Dette finder kun Sted for $a = 120^0$, $a = 90^0$ og $a = 60^0$. Man kan altsaa kun med 3, 4 og 6 sidede regulære Polygoner paa den anførte Maade bedække en Plan eller et endeligt Antal Lag af Planer. Ethvert andet regulært Polygonsystem vil bedække Planerne med deres Kanter.

TILLÆG TIL AFHANDLINGEN OM MIDDELFEJL PAA VÆRDIEN AF LIVSFORSIKRINGER.

(AF J. P. GRAM).

I min ovennævnte Artikel har jeg S. 101 benyttet en Formel II, om hvilket er angivet, at den strengt taget kun er rigtig, naar de deri indgaaende Størrelser w ere indbyrdes uafhængige. Dette sidste er imidlertid i Almindelighed ikke Tilfældet, da deres Sum

[1]) (2) kan ogsaa skrives som $\sin a \,.\, f(\cos a)$.

er lig 1, og de desuden alle maa være positive. Det samme gjælder ogsaa om den afledede Formel II'. For den Anvendelse, jeg har gjort af Formlen, faar denne Omstændighed vel ingen Indflydelse, da w'erne blive forsvindende smaa, men jeg vil dog, efterat Hr. Direktør Bing har gjort mig opmærksom paa, at det ikke er forbunden med nogen særlig Vanskelighed at finde den exakte Formel, som skal sættes i Stedet for II, vise, hvorledes denne kan udledes.

Jeg skal først betragte et analogt Exempel som umiddelbart lader sig anvende paa det foreliggende Tilfælde.

En Urne antages at indeholde røde, sorte og hvide Kugler Forholdet $x_1 : x_2 : x_3$; $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Der foretages n Udtræk af 1 Kugle, hver Gang med Nedlægning af den udtrukne Kugle.

Den aprioriske Sandsynlighed for r røde, s sorte og t hvide Kugler er da bestemt ved det Led i Udviklingen af $(x_1 + x_2 + x_3)^n$, som indeholder Exponenterne r, s, t. Den tilsvarende numeriske Koefficient betegnes for Kortheds Skyld ved a_{rst} og selve Leddet ved

$$A_{rst} = a_{rst}\, x_1^r\, x_2^s\, x_3^t. \quad (r + s + t = n).$$

Man har nu, idet $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, at $\Sigma A_{rst} = 1$, naar r, s, t gjennemløbe alle mulige Værdier, som de ifølge Sagens Natur kunne antage. Selve A'erne angive de relative Hyppigheder af de enkelte mulige Fordelinger af Kuglerne.

Der være nu forelagt en lineær Funktion af (x)

$$G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3,$$

hvis Værdi antages at være lig 0. Sætter man i Stedet for de aprioriske Sandsynligheder (x) Forholdene $\frac{r}{n}$, $\frac{s}{n}$ og $\frac{t}{n}$ faar Funktionen en anden Værdi, hvis Afvigelse fra Normalværdien Nul udtrykkes ved

$$G_1\left(x_1 - \frac{r}{n}\right) + G_2\left(x_2 - \frac{s}{n}\right) + G_3\left(x_3 - \frac{t}{n}\right).$$

Vi ville nu søge Middelværdien M af denne Størrelses Kvadrat, idet r, s, t gjennemløbe alle hele positive Værdier, for hvilke $r + s + t = n$. Da $\Sigma A_{rst} = 1$, faas M ved simpel Summation. Altsaa er

$$M = \Sigma\left(G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 - \frac{1}{n}(G_1 r + G_2 s + G_3 t)\right)^2 . A_{rst}$$

$$= \frac{1}{n^2}\Sigma(G_1 r + G_2 s + G_3 t)^2 A_{rst}.$$

Men da $A_{rst} = a_{rst}\, x_1^r x_2^s x_3^t$, saa haves

$$r . A_{rst} = x_1 . \frac{d}{dx_1} A_{rst},$$

$$rs . A_{rst} = x_1 \frac{d}{dx_1} . \left(x_2 \frac{d}{dx_2} A_{rst}\right),$$

$$r^2 A_{rst} = \left(x_1 \frac{d}{dx_1}\right)^2 A_{rst} \text{ o. s. v.}$$

Følgelig bliver

$$(G_1 r + G_2 s + G_3 t)^2 A_{rst} =$$

$$\left(G_1 x_1 \frac{d}{dx_1} + G_2 x_2 \frac{d}{dx_2} + G_3 x_3 \frac{d}{dx_3}\right)^2 A_{rst}.$$

Altsaa er ogsaa

$$M = \frac{1}{n^2}\left(G_1 x_1 \frac{d}{dx_1} + G_2 x_2 \frac{d}{dx_2} + G_3 x_3 \frac{d}{dx_3}\right)(x_1 + x_2 + x_3)^n$$

$$= \frac{1}{n}\left(G_1 x_1 \frac{d}{dx_1} + \ldots\right)(x_1 + x_2 + x_3)^{n-1}(G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3)$$

$$= \frac{n-1}{n}(x_1 + x_2 + x_3)^{n-2}(G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3)^2 +$$

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3)^{n-1}(G_1^2 x_1 + G_2^2 x_2 + G_3^2 x_3),$$

som, da $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ og $G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 = 0$, reducerer sig til

$$M = \frac{1}{n}(G_1^2 x_1 + G_2^2 x_2 + G_3^2 x_3).$$

Udtrækkes kun en enkelt Kugle faas for $n = 1$ Middelfejlskvadratet

$$\mu^2 = G_1^2 x_1 + G_2^2 x_2 + G_3^2 x_3. \qquad \text{(A)}$$

Det samme faas ogsaa ved følgende Betragtning. Er den udtrukne Kugle rød, bliver Afvigelsen fra Middelværdien

$$G_1(x_1 - 1) + G_2 x_2 + G_3 x_3 = -G_1.$$

Udtrækkes en sort eller hvid Kugle, faas henholdsvis $-G_2$ og $-G_3$. Disse Afvigelsers Kvadrater, multiplicerede hver med Sandsynligheden for de respektive Tilfældes Indtræden give netop μ^2.

Det er aabenbart, at Formlen (A) kan udvides ved Tilføjelse af analoge Led, hvis Urnen indeholder flere Slags Kugler.

Anvendelsen paa Dødelighedsforhold er umiddelbart indlysende. Her svare Sandsynlighederne w_i for, at en x-aarig Person skal dø om i Aar til de ovenanførte Sandsynligheder x_i, og i Stedet for Formel II' vil altsaa nu erholdes

$$\mu^2 = G_1^2 w_1 + G_2^2 w_2 + G_3^2 w_3 + \dots \qquad \text{(B)}$$

som vil stemme desto bedre overens med

$$\mu^2 = G_1^2 w_1 (1 - w_1) + G_2^2 w_2 (1 - w_2) + \dots \qquad \text{II'}$$

jo mindre w'erne ere. I Grænsetilfældet, hvor w'erne betragtes som svarende til uendelig smaa Tidsintervaller falde de to Formler sammen, hvilket viser, at Sandsynlighederne w da kunne betragtes som indbyrdes uafhængige.

NÅGRA ANMÄRKNINGAR RÖRANDE KROPPAR AF HÖGRE DIMENSIONER.

(AF G. D. H.)

En $(m-1)$-dimensionskropp i m-dimensionen representeras af 1 eqvation, en (m — 2)-dimensionskropp i m-dimensionen af 2, o. s. v., i allmänhet en $(m-r)$-dimensionskropp af r, och sål. punkten i m-dimensionen af m eqvationer. Denna sats kan man anse såsom den analytiska definitionen på m-dimensionen. Med gradtalet af $(m-r)$-dimensionskroppen förstås produkten af gradtalen af de representerande r eqvationerna.

En homogen eqvation i $(m+1)$ variabla af n'te grad innehåller

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{\underline{|m}} \text{ termer.}$$

Häraf följer omedelbart, att en $(m-1)$-dimensionskropp af n'te grad i m-dimensionen bestemmes af

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{\underline{|m}} - 1 \text{ vilkor.} -$$

Genom att använda dualitetsprincipen kan man finna ett stort antal satser om kroppar af högre dimensioner. — Enligt denna princip blir då i m-dimensionen:

0-dim. kroppen svarande mot $(m - 1)$-dim. kroppen,

1-dim. kroppen — — $(m - 2)$-dim. kroppen,

. . . . — — — —

r-dim kroppen — — $(m - r - 1)$-dim. kroppen,

och sål. antalet eqvationer får r-dim.-kroppen i m-dimensionen, uttryckte i homogena $(m - 1)$-dimensions-koordinater[1]), $= 1 + r$ d. v. s. oberoende af m. Mellanformen för öfvergången från punkt- till $(m - 1)$-dimensions-koordinater är $\sum_{i=1}^{i=m+1} \xi_i x_i = 0$.

Sammanbindningslinien mellan två punkter svarar dualistiskt motskärningen mellan två $(m - 1)$-dimensionskroppar af första graden. Denna skärning är sål. en $(m - 2)$-dimensionskropp af första graden, o. s. v. Alla projektiviska egenskaper hos punkter, kurvor, ytor har sin motsvarighet hos kroppar af $(m - 1)$sta, $(m - 2)$dra, $(m - 3)$die grad.

LØSNING AF OPGAVE 500, 567 OG 547.

500. Givet en Cirkel og to Punkter P og Q. Gjennem Q skal drages en ret Linie, som skjærer Cirklen i X og Y, saaledes at $PX + PY = a \, . \, XY$, hvor a er et givet Tal.

(C. Juel).

Lad R betegne Kordens Skjæringspunkt med Halveringslinien af $\angle XPY$, C den givne Cirkels Centrum. Da man har

$$\frac{PX}{RX} = \frac{PY}{RY} = \frac{PX + PY}{XY} = a,$$

vil en Cirkel, der har sit Centrum S paa PR og gaar gjennem X og Y, dele Linien PR harmonisk i Forholdet a. Forholdene $\frac{PR}{PS} = b$ og $\frac{SX}{SP} = c$ ere altsaa ogsaa bekjendte. S (og dermed

[1]) Motsvarande linie-plan-koordinater i planet och rymden resp.

Cirklen) kan nu bestemmes ved 2 geometriske Steder: En Linie gjennem S parallel med XY skjærer PQ i et Punkt T, der let bestemmes, da $\frac{PQ}{PT} = b$. S ligger i en Cirkel over CT som Diameter. Da man endvidere kjender Q's Potens med Hensyn til den søgte Cirkel, maa denne skjære en bekjendt Cirkel om Q orthogonalt, og Forholdet mellem Tangenterne fra S til denne Cirkel og til Punktet P (uendelig lille Cirkel) er c. Det andet geometriske Sted for S er altsaa en Cirkel, der let konstrueres.

(N. Madsen).

567. Haves 3 Keglesnit i et Bundt og drages fra et løbende Punkt i det ene en Tangent til hvert af de andre, vil Forbindelseslinien mellem Røringspunkterne indhylles af et nyt Keglesnit.

Det er ligegyldigt, hvilken Tangent der benyttes; drages nemlig fra et vilkaarligt Punkt i Planen Tangenterne til 2 Keglesnit i samme Plan, ville disses 4 fælles Tangenter og de 4 Forbindelseslinier mellem et Røringspunkt med det ene og med det andet Keglesnit være 8 Tangenter til samme nye Keglesnit.

(C. Juel).

Lægges 2 af de 4 faste Punkter, hvorigjennem alle Bundtets Keglesnit gaa, i Cirkelpunkterne, saa de 3 Keglesnit blive til 3 Cirkler C_1, C_2 og C_3, kan Sætningen bevises saaledes: Trækkes fra et vilkaarligt Punkt P paa C_3 en Tangent til hver af de 2 andre Cirkler, og betegnes Røringspunkterne ved A og B, er Forholdet $\frac{PA}{PB}$ konstant. Kaldes C_1 og C_2's Radier R_1 og R_2, ere de Korder, de afskjære paa AB, $= 2R_1 \sin PAB$ og $2R_2 \sin PBA$, og disses Forhold $\frac{2R_1 \sin PAB}{2R_2 \sin PBA} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{PB}{PA}$ er konstant. Men at Indhyllingskurven for en Linie, hvoraf C_1 og C_2 afskjære Korder med et givet Forhold K, er et Keglesnit, kan ses paa følgende

Maade. Skjærer Linien Cirklerne i Punkterne $C_1 D$ og $E_1 F_1$, saaledes at $CD = K . EF$, og er M et Punkt paa Linien, bestemt saaledes, at $MD = K . ME$ og $MC = K . MF$, vil den Vinkelrette paa Linien i M gaa gjennem et fast Punkt F, der deler Centerlinien i Forholdet K. Da man tillige har Forholdet mellem M's Potenser med Hensyn til C_1 og $C_2 = \frac{MC . MD}{ME . MF} = K^2$, vil M til geometrisk Sted have en Cirkel i det ved C_1 og C_2 bestemte Bundt, og Linien altsaa stadig være Tangent til et Keglesnit med Brændpunkt i F og Toppunkter i Centerliniens Skjæringspunkter med M's geometriske Sted. Det er let at se, at Keglesnittet maa røre C_1 og C_2's Fællestangenter.

(C. Crone).

547. Hvor mange forskjellige Cifre findes der gjennemsnitlig i et m-cifret Tal?

(S. Hertzsprung).

Sandsynligheden for, at et vist Ciffer ikke findes i det m-cifrede Tal, er $\left(\frac{9}{10}\right)^m$, og altsaa for, at det findes der een eller flere Gange: $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^m$; af de 10^m existerende m-cifrede Tal vil altsaa $10^m - 9^m$ indeholde dette Ciffer. Men da dette gjælder almindelig, faas heraf Middelantallet af forskjellige Cifre i Tallet at være:

$$G_m = \left\{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^m\right\} . 10 = 10 - \frac{9^m}{10^{m-1}}.$$

Exempelvis bliver for $m = 2, 3, 4, 5, 10, 100, \infty$ henholdsvis $G = 1.9,\ 2.71,\ 3.439,\ 4.0951,\ 6.513215599,\ 9.99973454,\ 10.$

Ønskes den samme Opgave løst, idet kun de i snævrere Forstand m-cifrede Tal betragtes, saa at altsaa alle saadanne, hvis første Ciffer er 0, bortfalde, saa faas Middelantallet G'_m at være G_{m-1} plus Sandsynligheden for, at et af Tallene 1, 2, 3 . . . 9 ikke forekommer i de $m - 1$ sidste Cifre men derimod som det første ɔ: $9 . \frac{1}{9} . \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}$. Man finder følgelig:

$$G'_m = G_{m-1} + \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} = 10 - \frac{9^m}{10^{m-1}} = G_m,$$

noget, som iøvrigt ogsaa er umiddelbart indlysende, idet alle de 10 Cifre ere lige sandsynlige og maa indgaa paa samme Maade i de 10^m m-cifrede Tal.

(P. Vedel).

Anden Opløsning.

Der findes $9 \,.\, 10^{m-1}$ m-cifrede Tal. Indeholde a_p af disse p forskjellige Cifre, bliver det søgte Gjennemsnitsantal

$$\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots 9a_9}{9 \,.\, 10^{m-1}} = \frac{A}{9 \,.\, 10^{m-1}}.$$

Lad nu et af de m-cifrede Tal, som indeholder p forskjellige Cifre, være

$$aab \ldots r.$$

Idet man da bagved Tallet tilføjer et af de p Cifre, som findes i Tallet, faar man følgende p $(n + 1)$-cifrede Tal

$$aab \ldots ra$$
$$aab \ldots rb$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$aab \ldots rr,$$

og bærer man sig lige saadan ad med alle de øvrige m-cifrede Tal, faar man herved en Række Tal, hvis Antal er A.

A kan altsaa bestemmes som Antallet af alle de $(n + 1)$-cifrede Tal, hvis sidste Ciffer findes mindst 2 Gange i Tallet, og idet B er Antallet af $(n + 1)$-cifrede Tal, hvis sidste Ciffer kun findes en Gang i Tallet, bliver

$$A + B = 9 \,.\, 10^m.$$

For at bestemme B, tages først de Tal, hvis sidste Ciffer er 0. Antallet af disse er 9^m. Antallet af de Tal, hvis sidste Ciffer er 1 (eller 2, 3 . .) er $9^m - 9^{m-1}$, saa at

$$B = 9^m + 9\,(9^m - 9^{m-1}) = 9^{m+1};$$

følgelig bliver $A = 9 \,.\, 10^m - 9^{m+1}$;

det søgte Gjennemsnitsantal er da $\dfrac{A}{9 \,.\, 10^{m-1}} = \dfrac{10^m - 9^m}{10^{m-1}}$.

(A. S. Bang).

Anm. Skjønt begge de meddelte Løsninger have ført til det rigtige Resultat, vil det dog ikke være overflødigt at antyde, hvorledes Opgaven løses ved den af Opgavestilleren angivne almindelige Methode, som findes udviklet i Tidsskriftets Aargang 1886, S. 154.

Der er af m-cifrede Tal, som skrives med

højst p Cifre 1, 2 ... p , et Antal af ... p^m,
.... $p-1$ .... 2 ... $p-1$ - ...... - $(p-1)^m$,
altsaa
med Cifret 1 og indtil $(p-1)$ andre, $p^m - (p-1)^m = \nabla p^m$,
.... 1 - .... $(p-1)$ ..... $(p-1)^m - (p-2)^m = \nabla (p-1)^m$,
altsaa
med Cifrene 1 og 2 og indtil $(p-2)$ andre, $\nabla p^m - \nabla (p-1)^m = \nabla^2 . p^m$
osv. osv.;
med p bestemte Cifre, som skulle findes i alle Tallene, $\nabla^p . p^m$,
og med p forskjellige vilkaarlig valgte blandt n Cifre:

$$n_p \nabla^p . p^m = n_p (p^m - p_1 (p-1)^m + p_2 (p-2)^m + \dots).$$

hvor n_i og p_i betegne Binomialkoefficienter.

Beregningen af den søgte Middelværdi frembyder herefter ingen Vanskelighed.

(J. P. G.)

OPGAVE TIL LØSNING.

568. Hvilken Tværsum har et m-cifret Tal gjennemsnitlig?

(A. S. Bang).

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von — **Journal rédigé par**

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

Meddelelse til Abonnenterne!

Foruden nærværende Hefte vil der i November Maaned endnu udkomme et Tillægshefte til indeværende Aargang, **med hvilken Tidsskriftet derefter afsluttes.**

Til Tillægsheftet, som navnlig vil indeholde Examensopgaver fra 1889, kunne mindre Bidrag modtages indtil Midten af Oktober.

Et nyt mathematisk Tidsskrift vil fra Januar 1890 blive udgivet af Dhrr. Cand. mag. *P. T. Foldberg* og Dr. phil. *C. Juel.*

Redaktionen.

TIDSSKRIFT

FOR

MATHEMATIK.

UDGIVET

AF

J. P. Gram og H. G. Zeuthen

FEMTE RÆKKE.

Sjette Aargang.

KJØBENHAVN.

E. JESPERSENS FORLAG.

HOFFENSBERG & TRAP'S ETABL. — KJØBENHAVN.

1888.

SYVENDE HEFTE.

(Slutning).

OM UNIKURSALKURVOR AF 3DJE KLASSEN.[1])

(AF G. D. H.).

Hvarje unikursalkurva utmärkes derigenom, att dess koordinater kunna uttryckas som rationela algebraiska funktioner af en variabel parameter, vare sig man använder punkt- eller linie-koordinater.

Om till en unikursalkurva, uttryckt i liniekoordinater efter parametermetoden,

$$\xi_i = f_i(m), \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

tangenter dragas ifrån en punkt,

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 = 0, \tag{2}$$

erhållas koordinaterna för dessa tangenter genom elimination af ξ_i mellan de 4 eqvationerna (1) och (2), lösning af eliminationsresultatet

$$a_1 f_1(m) + a_2 f_2(m) + a_3 f_3(m) = 0$$

i afseende på m och insättning af de funna m-värdena i (1). — Unikursalkurvans klass är således lika med det högsta gradtal (låt vare n), i hvilket m ingår i eqvationerna (1).

Koordinaterna för de gemensamma tangenterna till en kurva

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \tag{3}$$

och den gifna unikursalkurvan (1) fås på analogt sätt genom elimination af ξ_i, upplösning af eqvationen

$$F[f_1(m), f_2(m), f_3(m)] = 0 \tag{4}$$

i afseende på m, samt insättning i eqvationssystemet (1). Är eqvationen (3) af graden r, fås härigenom de nr gemensamma tangenterna.

Alldenstund de tre expressionerna $f_i(m)$ äro algebraiska rationela funktioner af parametern m, kan unikursalkurvan tänkas alstrad af en tangent, som rör sig kontinuerligt. Finnes en dubbeltangent hos unikursalkurvan, så måste de två olika parametervärdena för denna tangent ge samma värde på tangentens liniekoordinater och således ock på förhållandena $\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}$.

[1]) Med anslutning till Lektor Johansons afhandling: Några tillämpningar af det Abelska teoremet å unicursala kurvor, som ega en dubbelpunkt eller en spets. Göteborg 1885.

Betecknar man med p och q de tvenne värden på parametern m, som motsvara dubbeltangenten, fås

$$\frac{f_1(p)}{f_1(q)} = \frac{f_2(p)}{f_2(q)} = \frac{f_3(p)}{f_3(q)} = c. \qquad (5)$$

Låt nu kurvorna (1) och (3) vara af resp. n'te och r'te klass. De gemensamma tangenterna fås genom lösning i afseende på m af eqvation (4), hvilken är af graden nr. Låt rötterna vara $m_1, m_2, m_3 \ldots m_{nr}$, och eqvation (4) kan skrifvas under följande form

$$(m - m_1)(m - m_2)(m - m_3)\ldots(m - m_{nr}) = 0. \qquad (6)$$

Häraf inses, att produkten:

$\prod_{i=1}^{nr} (p - m_i)$ kan skrifvas: $F[f_1(p), f_2(p), f_3(p)]$,

och produkten $\prod_{i=1}^{nr}(q - m_i)$: $F[f_1(q), f_2(q), f_3(q)]$,

och således

$$\prod_{i=1}^{nr} \frac{p - m_i}{q - m_i} = \frac{F[f_1(p), f_2(p), f_3(p)]}{F[f_1(q), f_2(q), f_3(q)]},$$

men alldenstund eqvationen (3) är homogen och relationen (5) gäller, fås

$$\prod_{i=1}^{nr} \frac{p - m_i}{q - m_i} = c^r.$$

Denna vigtiga eqvation innehåller Abelska teoremet, tillämpadt på unikursala n'te klass kurvor.

Tillämpning af det Abelska teoremet på unikursalkurvor af tredje klass.

De 3 slag af C_3, som finnas, utmärkas af följande Plückerska karakterer:

	μ	ν	δ	$\varkappa$	τ	ι	p
1)	3	3	0	1	0	1	0
2)	4	3	0	3	1	0	0
3)	6	3	0	9	0	0	1.

Endast de två förra kunna såsom unikursala här komma i fråga till behandling. Vi begynna med 2)

C_3^4 med dubbeltangent.

Vi särskilja tvenne fall:

1) Dubbeltangentens kontaktspunkter äro reela, p och q reela.

2) Dubbeltangentens kontaktspunkter imaginära, p och q konj. qvant.

I förra fallet består kurvan af en sluten gren med en reel spets och en reel dubbeltangent, i senare fallet af en sluten gren med 3 reela spetsar och en dubbeltangent, som icke råkar kurvan i någon reel punkt.

För tangenternas parametervärden från en godtycklig punkt till C_3^4 gäller enligt Abels teorem relationen

$$\frac{m_1 - p}{m_1 - q} \cdot \frac{m_2 - p}{m_2 - q} \cdot \frac{m_3 - p}{m_3 - q} = c.$$

Vi skrifva $[m_1]\,[m_2]\,[m_3] = c$.

Man bevisar lätt indirekt, att satsens omvändning gäller: Om parametervärdena för tre tangenter äro förbundna genom ofvanstående relation, gå dessa tangenter genom en punkt.

För att tangenten skall vara spetstangent fordras $m_1 = m_2 = m_3$; kallas spetstangentens parametervärde k, fås

$$\left(\frac{k - p}{k - q}\right)^3 = c.$$

Häraf 3 k-värden. Angående deras realitet, se nedan.

Sättes $k = \infty$ fås $c = 1$, och då vi i det följande utgå från en af spetsarne med parametervärdet $= \infty$, sätta vi hädan efter konstanten $= 1$.

De tre spetstangenterna gå genom en punkt.

Bevis: De tre spetstangenternas parametervärden erhållas ur eqvationen $$\left(\frac{k - p}{k - q}\right)^3 = 1.$$

Låt rötterna vara k_1, k_2, k_3. Då fås

$$\frac{k_1 - p}{k_1 - q} = 1,\quad \frac{k_2 - p}{k_2 - q} = e^{\frac{2\pi i}{3}},\quad \frac{k_3 - p}{k_3 - q} = e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

De satisfiera ofvan anförda vilkor

$$\frac{k_1 - p}{k_1 - q} \cdot \frac{k_2 - p}{k_2 - q}\, \frac{k_3 - p}{k_3 - q} = 1,$$

och tangenterna gå sål. genom en punkt. h. s. b.

I Lektor Johansons afhandling bevises följande sats: Om

$$\frac{m - Ae^{\vartheta i}}{m - Ae^{-\vartheta i}} = Be^{\psi i},$$

så är m reelt eller imaginärt, allt eftersom B är lika eller $\lessgtr 1$.

Men användning af denna sats finnes lätt, att då p och q äro reela, endast en af spetstangenterna är reel, deremot alla tre spetstangenterna reela, om p och q äro imaginära.

Från en punkt på kurvan kan utom tangenten i punkten dragas ännu en tangent, då kurvans klass är 3 och tangenten i punkten räknas dubbel.

Betecknas parametervärdet för tangenten i punkten i fråga med α och parametervärdet för den andra tangenten från punkten med β, är enl. Abels teorem

$$[\alpha]^2 [\beta] = 1.$$

Mot ett α-värde svarar ett β-värde (kurvan af klassen 3).

Mott ett β-värde svarar två α-värden (kurvan skäres af tangenten i två punkter utom kontaktspunkten: kurvans ordning $= 4$).

Vi vilja undersöka realiteten af de α-värden, som svara mot ett visst β-värde.

1) p och q reela.

$$[\alpha]^2 [\beta] = 1$$

eller

$$\frac{\alpha - p}{\alpha - q} = \pm \sqrt{\frac{\beta - q}{\beta - p}}.$$

När β ligger mellan p och q, d. v. s. när β-tangenten tangerar i en punkt utanför dubbeltangentens kontaktspunkter (obs. parametern i spetsen $= \infty$), blir α-värdena imaginära. Tangenten i sådana punkter skär ej kurvan i någon reel punkt. Af vår erhållna formel följer ock, att, då β ej ligger mellan p och q, d. v. s. då tangentens kontaktspunkt ligger innanför dubbeltangentens kontaktspunkter, tangenten träffar kurvan i ännu två reela punkter.

I detta fall är det ena värdet å bråket

$$\frac{\alpha - p}{\alpha - q}$$

positivt, det andra negativt, d. v. s. det ena α-värdet ligger mellan p och q, det andra icke. Af de två reela punkter, i hvilka tan-

genten träffar kurvan, ligger den ena utanför dubbeltangentens kontaktspunkter, den andra mellan dem.

2) p och q imaginära konjugatqvantiteter.

Genom insättningen

$$p = Ae^{\vartheta i},\ q = Ae^{-\vartheta i},$$

$$\cos\psi = \frac{\beta - A\cos\vartheta}{\beta^2 + A^2 - 2\beta A\cos\vartheta},\ \sin\psi' = \frac{-A\sin\vartheta}{\beta^2 + A^2 - 2\beta A\cos\vartheta}$$

fås efter några enkla reduktioner

$$\frac{a - Ae^{\vartheta i}}{a - Ae^{-\vartheta i}} = \pm e^{\frac{\psi - \psi_1}{2}i} = \begin{cases} e^{\frac{\psi-\psi_1}{2}i} \\ e^{\left(\pi + \frac{\psi-\psi'}{2}\right)i} \end{cases}.$$

Alldenstund modylen $= 1$, äro båda värdena reela. Tangenten skär sål. kurvan alltid i två reela punkter utom kontaktspunkterna.

Vi vilja nu behandla problemet: Tangenten i en gifven punkt på kurvan dragas. I den eller de punkter, i hvilka tangenten skär kurvan, dragas tangenterna etc.

Frågas efter de konsekutiva tangenternas parametervärden.

1) p och q imaginära.

$$[\alpha]^2\,[\beta] = 1.$$

Sätt $\beta = e^{\varphi i}$, fås $[\alpha]^2 = e^{-\varphi i}$, hvaraf

$$[\alpha_1] = e^{-\frac{\varphi}{2}i},\ [\alpha_2] = e^{\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right)i}.$$

Utgå vi nu från spetstangenten der $[\beta] = 1$ eller $\varphi = 0$, fås $\alpha_1 = e^{0.i}$ $\alpha_2 = e^{\pi i}$, den ena af de två punkterna, i hvilka tangenten skär kurvan är spetsen, den andra har $\varphi = \pi$. Tager man nu denna tangent till utgångspunkt får φ värdena $\frac{3}{2}\pi$ och $\frac{\pi}{2}$. Man finner sål. följande tabell för successiva värden å φ.

$$0$$

$$1$$

$$\pi$$

$$1$$

$$\frac{3}{2}\pi \qquad\qquad \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{4}\pi \qquad \frac{\pi}{4} \qquad \frac{7}{4}\pi \qquad \frac{3}{4}\pi \quad \text{etc.}$$

och analoga skemata om man utgår från någon af de andra spetstangenterna.

2) p och q reela.

$$[\alpha^2]\,[\beta] = 1.$$

Om vi utgå från den enda reela spetsen, der $[\beta] = 1$ fås $[\alpha_1] = 1$ $[\alpha_2] = -1$; i ena fallet återkommer man till spetsen, i andra fallet kommer man till en kontaktspunkt utanför dubbeltangentens kontaktspunkter, från hvilken man sål. ej kommer vidare.

Antages deremot, att vi utgå från någon annan känd tangent, hvars parametervärde må vara t, fås

$$[\alpha_1] = \frac{1}{\sqrt{t}},\ [\alpha_2] = -\frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Från det senare parametervärdet komma vi ej vidare, men utgår man från det förra parametervärdet, finner man på samma sätt som nyss två kontaktspunkter. Skema för $[\alpha]$-värden:

$$t$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \qquad -\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\sqrt[4]{t} \qquad -\sqrt[4]{t}$$

$$\frac{1}{\sqrt[8]{t}} \qquad -\frac{1}{\sqrt[8]{t}} \qquad \text{etc.}$$

Som man finner, närmer sig

$$\frac{1}{\sqrt{t}},\ \sqrt[4]{t},\ \frac{1}{\sqrt[8]{t}}\ \ldots\ \text{indefinit } 1$$

och

$$-\frac{1}{\sqrt{t}},\ -\sqrt[4]{t},\ -\frac{1}{\sqrt[8]{t}}\ \ldots\ \text{indefinit } -1,$$

således närmar man sig genom upprepad tangentdragning dels den reela spetsen, dels en punkt utanför dubbeltangentens kontaktspunkter.

Vi öfvergå nu till

C_3^3 med inflexion,

det gränsläge, hvartill C_3 med dubbeltangent närmar sig derigenom att dubbeltangenten blir inflexionstangent och den utanför dubbeltangentens kontaktspunkter liggande delen af kurvan försvinner.

Då dubbeltangenten öfvergår till inflexionstangent modifieras Abels teorem på följande sätt:

$$\prod_{i=1}^{i=nr} \frac{m_i - p}{m_i - q} = c.$$

Vid inflexionstangenten blir $p = q$. Sättes $p = q + \varepsilon$ (ε en oändligt liten qvantitet), fås

$$\prod_{i=1}^{nr} \frac{m_i - q - \varepsilon}{m_i - q} = \prod_{i=1}^{nr} \left(1 - \frac{\varepsilon}{m_i - q}\right) = c,$$

eller då man tar logaritmen för båda membra:

$$\mathop{S}_{1}^{nr} \log \left[1 - \frac{\varepsilon}{m_i - q}\right] = \log . c.$$

Nu är om $x < 1$

$$\log (1 - x) = - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$$\therefore \mathop{S}_{1}^{nr} \log \left(1 - \frac{\varepsilon}{m_i - q}\right) = - \frac{\varepsilon}{1} \mathop{S}_{1}^{nr} \frac{1}{m_i - q} - \frac{\varepsilon^2}{2} \mathop{S}_{1}^{nr} \frac{1}{(m_i - q)^2} - \ldots$$

$= \log c$, eller vid öfvergång till limes

$$\mathop{S}_{i=1}^{nr} \frac{1}{m_i - p} = k, \text{ såvida } \frac{\varepsilon}{m_i - q} < 1, \text{ d. v. s. ej } m_i = q.$$

Teoremet gäller ej för sjelfva inflexionstangenten.

För att tangenten fran en viss punkt skall vara spetstangent, måste tre parametervärden vara lika. Antag detta värde a, fås $\frac{3}{a - p} = k$, sål. en reel spets. Om man utgår från spetsen med parametervärdet $= \infty$, blir $k = 0$, och man kan skrifva Abels teorem tillämpadt pa C_4^3

$$\sum_{1}^{3} \frac{1}{m_i - p} = 0.$$

Om man i en punkt pa kurvan lägger en tangent med parametervärdet a, träffar denna tangent kurvan i en punkt, hvars tangent motsvarar parametervärdet β. Mellan a och β gäller relationen:

$$\frac{2}{a - p} - \frac{1}{\beta - p} = 0.$$

Mot ett a-värde svarar ett β-värde. Utom β-tangenten, som räknas dubbel, kan [illegible]

Mot ett β-värde svarar ett α-värde (Tangenten skär kurvan i ännu en punkt: kurvans ordning $= 3$).

Genom upprepad tangentdragning närmar man sig spetsen. Tag β till utgångspunkt fås

$$\frac{1}{\alpha_1 - p} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\beta - p},$$

$$\frac{1}{\alpha_2 - p} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_1 - p} = \frac{(-1)^2}{2^2}\frac{1}{\beta - p}, \text{ o. s. v.}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha_n - p} = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{\beta - p},$$

således $\lim \frac{1}{\alpha_n - p} = 0$ eller $\alpha_n = \infty$, men detta var just spetsens parametervärde, hvilket man således indefinit närmar sig. h. s. b.

OM IRRATIONALITETEN AF TALLET e.

(AF AXEL THUE).

Liouville var som bekjendt den første, hvem det lykkedes at bevise, at Grundtallet i det naturlige Logarithmesystem ikke er nogen rational Størrelse, ja ikke engang Rod i nogen Ligning af anden Grad med rationale Koefficienter.

I det efterfølgende skal vi gjennem en Generalisation af hans Methode godtgjøre, at heller ikke e^2 kan være Rod i nogen saadan Ligning.

Vi paastaar altsaa, at der ikke kan existere nogen Ligning af Formen

$$\alpha e^4 + \beta e^2 + \gamma = 0$$

eller

$$\alpha e^2 + \gamma e^{-2} = -\beta,$$

naar α, β, γ er hele Tal, positive eller negative.

Var nemlig saa Tilfældet, fik man:

$$\alpha\left[1+\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{2^{m-1}}{(m-1)!}+\frac{2^m}{m!}e^{2\vartheta}\right]+$$

$$\gamma\left[1-\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1.2}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{2^{m-1}}{(m-1)!}+(-1)^m\frac{2^m}{m!}e^{-2\lambda}\right] = -\beta.$$

$$1>\vartheta>0. \qquad 1>\lambda>0.$$

Alle de her optrædende Brøker kan nu forkortes, til ingen af Nævnerne indeholder nogen Faktor 2, medens Tællerne selv for nok saa store Værdier af m kan synke helt ned til Tallet 2.

Man har, at den højeste Potens af et Primtal p, der kan gaa op i

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots m$$

har en Exponent k, bestemt ved Ligningen:

$$k=E\left(\frac{m}{p}\right)+E\left(\frac{m}{p^2}\right)+\ldots$$

Er $p=2$, saa faar man

$$E\left(\frac{m}{2}\right)\leqq\frac{m}{2},$$

$$E\left(\frac{m}{2^2}\right)\leqq\frac{m}{2^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E\left(\frac{m}{2^x}\right)\leqq\frac{m}{2^x},$$

hvor 2^x er den højeste Potens af 2, der er mindre end m.

Vi faar $$k<m\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right]$$

eller $$k<m.$$

Tællerne i vore Brøker indeholde altsaa Primtallet 2 i en højere Potens end de tilsvarende Nævnere.

Er $m=2^n$, bliver

$$E\left(\frac{2^n}{2}\right)=2^{n-1},$$

$$E\left(\frac{2^n}{2^2}\right)=2^{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E\left(\frac{2^n}{2^n}\right)=1,$$

eller $$k = 2^n - 1.$$

Man har følgelig

$$\frac{2^{(2^n)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2^n} = \frac{2}{h},$$

hvor h er et helt Tal.

Har nu α og γ modsat Tegn, sætter man

$$m = 2^n + 1,$$

har de samme Tegn, sættes

$$m = 2^n + 2.$$

Koefficienterne for $e^{2\vartheta}$ og $e^{-2\lambda}$ bliver i de to Tilfælde forkortede respektive lig

$$\frac{4}{P \cdot (2^n + 1)} \text{ eller } \frac{4}{Q \cdot (2^{n-1} + 1)}.$$

Multiplicerer man i første Tilfælde over hele Ligningen med P, i andet med Q, saa faar man, ifald α og γ har modsat Tegn, at

$$\frac{4\alpha e^{2\vartheta} - 4\gamma e^{-2\lambda}}{2^n + 1}$$

uafhængig af n skal være et helt Tal eller 0, og ifald α og β har samme Tegn, at

$$\frac{4\alpha e^{2\vartheta} + 4\gamma e^{-2\lambda}}{2^{n-1} + 1},$$

skal være lig et helt Tal eller Nul.

Da n kan vælges saa stor, man vil, kan ovenstaaende ikke finde Sted; herved er Satsen bevist.

Ovenstaaende Raisonnement kan ogsaa anvendes paa andre Størrelsesudtryk. Man vil saaledes til Exempel kunne bevise, at baade

$$sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \text{ og } cos^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

er irrationale, naar x er et vilkaarligt helt Tal.

BEMÆRKNINGER OVER LIGNINGEN

$$y\frac{dy}{dx} + Py = Q.$$

(AF ALF. GULDBERG).

I Tidsskriftets Aargang 1881 er følgende Opgave stillet, (Nr. 452): at finde det almindelige Integral i Differentialligningen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-\frac{y}{x}},$$

naar $y = xlx$ er et partikulært i samme.

Sætter man $$e^{\frac{y}{x}} = t,$$

saa faas $$y = x\,lt,$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d_x t}{t} + lt,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x\,\frac{t\,.\,\frac{d^2t}{dx^2} - \left(\frac{dt}{dx}\right)^2}{t^2} + 2\,\frac{\left(\frac{dt}{dx}\right)}{t} = e^{-\frac{y}{x}} = \frac{1}{t}.$$

Ligningen gaar altsaa over i følgende:

$$xt\frac{d^2t}{dx^2} - x\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + 2t\frac{dt}{dx} - t = 0,$$

der er en homogen Differentialligning af 2den Orden. Sætter man derfor

$$x = e^{\vartheta},\quad t = e^{\vartheta}\,.\,z,$$

faas $$\frac{dt}{dx} = \frac{dz}{d\vartheta} + z,$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = e^{-\vartheta}\left\{\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + \frac{dz}{d\vartheta}\right\}.$$

Indsættes disse Værdier for x, t, $\frac{dt}{dx}$ og $\frac{d^2t}{dx^2}$, gaar Ligningen over i følgende:

$$e^{\vartheta}\,.\,z\left\{\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + \frac{dz}{d\vartheta}\right\} - e^{\vartheta}\left\{\frac{dz}{d\vartheta} + z\right\}^2 + 2\,e^{\vartheta}z\left\{\frac{dz}{d\vartheta} + z\right\} - e^{\vartheta}\,.\,z = 0,$$

hvor e^{ϑ} kan bortdivideres.

Sættes videre

$$\frac{dz}{d\vartheta} = u, \text{ det er } \frac{d^2z}{d\vartheta^2} = \frac{du}{d\vartheta} = u\frac{du}{dz},$$

erholdes følgende Ligning:

$$zu\frac{du}{dz} + uz - u^2 + z^2 - z = 0.$$

Substitueres
$$u = zy,$$
altsaa
$$\frac{du}{dz} = z\frac{dy}{dz} + y,$$
erholdes
$$z^2y\left\{z\frac{dy}{dz} + y\right\} + z^2y - z^2y^2 + z^2 - z = 0,$$
eller
$$z^2y\frac{dy}{dz} + zy + z - 1 = 0,$$
der ogsaa kan skrives:

$$y\frac{dy}{dz} + \frac{1}{z}y = \frac{1-z}{z^2},$$

en Ligning, der fremgaar som et specielt Tilfælde af følgende:

$$y\frac{dy}{dz} + Py = Q,$$

hvor P og Q ere hvilkesomhelst Funktioner af z. Denne Ligning er i sin Tid undersøgt og løst af Abel i et Par specielle Tilfælde, (cfr. Abel: Oeuvres complètes, tome II).

Geometrisk betragtet, fremstiller den Ligningen for en Kurve, hvis Subnormal er en lineær Funktion af dens Ordinat (y) med Funktioner af Abscissen til Koefficienter.

Vi vil se lidt paa den almindelige Ligning

$$y^n\frac{dy}{dx} + Py^{\frac{n+1}{2}} = Q.$$

Ligningen er i denne Form i følgende to Tilfælde integrabel.

1. Naar P og Q er homogene Funktioner, respektive af Graden $\frac{n-1}{2}$ og n; Ligningen er nemlig i saa Fald selv homogen.

Sætter vi
$$y = xr, \text{ ɔ: } dy = xdr + rdx,$$
saa faas
$$r^n(xdr + rdx) + \varphi(r)dx = 0,$$
hvor
$$\varphi(r) = \frac{Py^{\frac{n+1}{2}} - Q}{x^n}.$$

Ved Separation af de Variable og Reduktion til Kvadratur erholdes:

$$log\, x + \int \frac{v^n\, dv}{v^{n+1} + \psi(v)} = 0$$

som Løsning af Ligningen.

2. Naar $Q = m \,.\, P$, m en vilkaarlig Konstant. Skrives Ligningen:

$$y^n \frac{dy}{dx} + P\left(y^{\frac{n+1}{2}} - \frac{Q}{P}\right) = 0,$$

saa antager den ved Reduktion til Kvadratur følgende Form:

$$\int \frac{y^n\, dy}{y^{\frac{n+1}{2}} - m} + \int Pdx = 0.$$

I flere end de to nævnte Tilfælde kan Ligningen i sin fulde Almindelighed ikke integreres. Partikulære Integraler kan derimod paa forskjellig Vis, med større eller mindre Lethed findes. At et almindeligt Integral ikke algebraisk kan udtrykkes ved de partikulære i en Ligning af ovenstaaende Form er imidlertid vist af L. Königsberger.

Til Slutning et Par Tilfælde, hvor partikulære Integraler ligetil fremgaar af Ligningen; vi sætter for Simpelheds Skyld $n = 1$. Ligningen lyder altsaa:

$$y \frac{dy}{dx} + Py = Q.$$

I Tilfælde af, at

$$Q = x - \int Pdx,$$

vil

$$y = Q$$

være et partikulært Integral, idet Ligningen i saa Fald tilfredsstilles ved at sætte $y = Q$.

Ligeledes vil

$$y = P$$

være et Integral, hvis følgende Betingelse finder Sted mellem P og Q:

$$\sqrt{P} = 2\, e^{-2x} \left\{ \int e^{2x}\, Qdx + C \right\}.$$

Man kunde paa lignende Maade finde en Række partikulære Integraler i Ligningen; Fremstillingen af disse vil specielt have sin

Betydning, naar Ligningen er fremkommen som i ovenfor anførte Exempel ved Reduktion af en homogen Differentialligning af 2den Orden; thi man kan derved atter opnaa et Integral i Grundligningen.

EXAMENSOPGAVER.

Polyteknisk Examen. Januar 1889.

Kemikere.

Ligningen for en Kurve i retvinklede Koordinater x og y tilfredsstiller Differentialligningen

$$(4x^2y^2 + x^4 - y^4)\frac{dy}{dx} = 4xy^3.$$

Man skal finde Kurvens Ligning baade i retvinklede og i polære Koordinater, naar Kurven skal gaa gjennem Punktet $x = 0$, $y = -1$. Endvidere søges Kurvens Figur og Arealet af dens lukkede Del.

Opl. Differentialligningen er homogen og vil, naar den integreres paa sædvanlig Maade, give

$$y(x^2 + y^2) = x^2 - y^2.$$

Ligningen i polære Koordinater er

$$r = \frac{\cos 2\vartheta}{\sin \vartheta}.$$

Kurven er symmetrisk med Hensyn til Y-Axen; Begyndelsespunktet er et et Dobbeltpunkt med Tangenterne

$$y = \pm x.$$

Fra Dobbeltpunktet udgaa over X-Axen to Grene med Asymptoten

$$y = 1.$$

Under X-Axen udskyder der fra Begyndelsespunktet et lukket Blad med Arealet

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\cos^2 2\vartheta}{\sin^2 \vartheta}\, d\vartheta = \frac{4 - \pi}{2}.$$

Ingeniører.

1. Find x, y, z som Funktioner af t af Differentialligningerne

$$\frac{dx}{dt} = y + z + 2t - 1,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + z + 2t - 1,$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y + 2t - 1.$$

Opl. Den første Ligning differentieres. Ved at kombinere Resultatet med de to andre faas da

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 2t + 1.$$

Denne Differentialligning har det partikulære Integral $x = -t$. Man finder da let det fuldstændige

$$x = -t + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Subtraktion af de to første givne Differentialligninger giver

$$x - y = C_3 e^{-t},$$

$$y = -t + C_1 e^{2t} + (C_2 - C_3) e^{-t}.$$

z kan nu findes uden Integration:

$$z = -t + C_1 e^{2t} - (2C_2 - C_3) e^{-t}.$$

2. En Konoide frembringes af en ret Linie, som i et retvinklet Koordinatsystem bevæger sig parallelt med xy-Planen, skjærende Linien

$$x = R,\quad y = 0,$$

og rørende Kuglen $\quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Man skal

1) finde Konoidens Ligning.

2) vise, at Røringskurven mellem Konoiden og Kuglen projiceres paa xy-Planen som to sammenfaldende Cirkler, paa xz-Planen som to sammenfaldende Parabler.

3) finde Volumen af det indenfor Kuglen liggende Stykke af Røringskurvens projicerende Cylinder paa xy-Planen. (Integrationen lettes ved Indførelse af polære Koordinater i xy-Planen.)

Opl. Frembringerens Ligninger ere:

$$z = \gamma,\quad y = \alpha\, x - R.$$

Betingelsen for dens Røring med Kuglen er:

$$R^2 = \gamma^2 (1 + \alpha^2).$$

Fladens Ligning faas, naar man mellem disse tre Ligninger eliminerer α og γ:

$$(x - R)^2 (R^2 - z^2) = z^2 y^2.$$

Røringskurvens Projektioner ere:

$$(x^2 + y^2 - Rx)^2 = 0,$$
$$(z^2 + Rx - R^2)^2 = 0.$$

Det søgte Volumen er:

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{R \cos\vartheta} \sqrt{R^2 - r^2} \,.\, rdr = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\right) R^3.$$

3. En tung Partikel kan uden Modstand bevæge sig indeni et uendelig snævert og uendelig langt retlinet Rør. Røret drejer sig med konstant Vinkelhastighed k i en lodret Plan om et af sine Punkter. Ved Bevægelsens Begyndelse er Røret vandret, og Partiklen er i Hvile i Afstanden a fra Rørets faste Punkt. Rørets første Bevægelse er saadan, at Partiklen synker. Man skal finde Partiklens Sted til en hvilkensomhelst Tid.

Opl. Akcelerationens Komposant i Retning af radius vector er

$$\frac{d^2r}{dt^2} - k^2 r = g \sin kt.$$

(Se Kinematik Opg. 26).

Denne Differentialligning har til partikulært Integral

$$-\frac{g}{2k^2} \sin kt.$$

Det fuldstændige Integral er da

$$r = -\frac{g}{2k^2} \sin kt + C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}.$$

Konstanterne bestemmes ved, at $t = 0$ skal give $r = a$, $\frac{dr}{dt} = 0$:

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{g}{2k^2}\right), \quad C_2 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g}{2k^2}\right).$$

Adgangsexamen til polyteknisk Læreanstalt. Juni 1889.

1. a) To Trekanter ABC og $A'B'C'$ samt en ret Linie L ere tegnede i samme Plan saaledes, at AB er parallel med $A'B'$.

Man skal finde to Punkter D og D' saaledes, at D ligger paa L, og saaledes, at DA, DB, DC ere parallele med henholdsvis $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$.

b) To Cirkler med Radius a og b ere afsatte paa Tegnepapiret. Parallelt med Centrilinien skal man trække én Linie, af hvilken Cirklerne afskjære Korder med givet Forhold. Mellem hvilke Grænser maa Kordernes Forhold ligge, for at Opgaven skal være mulig?

Opløsning. a) Naar man gjennem B og A tegner Linier BC'' og AC'' parallele med $B'C'$ og $A'C'$, saa er Figuren $AC''BD$ ligedannet med Figuren $A'C'B'D'$. Punktet D kommer da til at ligge paa Linien CC''. Derved kan Opgaven let løses.

b) Den ene Cirkel forskydes parallelt med Centrilinien, til den bliver koncentrisk med den anden. Man vil da let kunne tegne en Figur, som er ligedannet med den, der dannes af de nu oven paa hinanden liggende Korder og Radierne til deres Skjæringspunkter med Cirklerne. Derved vil Opgaven i det væsentlige være løst. — Antages $a < b$, maa Kordernes Forhold f tilfredsstille Betingelsen

$$\frac{b}{a} \leqq f < \infty.$$

2. a) I en spidsvinklet Trekant ABC er indskrevet en Trekant $A_1B_1C_1$ saaledes, at A_1, B_1, C_1 henholdsvis ligge paa Siderne AB, BC, CA, og at Siderne A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 henholdsvis ere vinkelrette paa AB, BC, CA. Find Siderne i $A_1B_1C_1$ udtrykte ved Siderne a, b, c i ABC.

b) I en spidsvinklet Trekant ere Siderne

$$a,\ b,\ c,$$

deres modstaaende Vinkler henholdsvis

$$A,\ B,\ C.$$

Man tegner en ny Trekant med Sider

$$a \cos A,\quad b \cos B,\quad c \cos C.$$

Vis, hvorledes disse Siders modstaaende Vinkler kunne udtrykkes, den første alene ved A, den anden alene ved B, og den tredie alene ved C.

Opløsning. a) Af en Figur faas:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}, \tag{1}$$

$$a = \frac{c_1}{\sin B} + a_1 \cot C. \qquad (2)$$

Af (2) kan c_1 bortskaffes ved Hjælp af (1). Da faas:

$$a = a_1 \frac{c \sin C + a \cos C \,.\, \sin B}{a \sin B \sin C},$$

$$a = a_1 \,.\, \frac{c^2 + ab \cos C}{ab \sin C},$$

$$a_1 = a \,.\, \frac{4\,T}{a^2 + b^2 + c^2},$$

Analoge Udtryk for de andre Sider.

b) Den overfor $a \cos A$ liggende Vinkel kaldes α; da er

$$\cos \alpha = \frac{b^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 C - a^2 \cos^2 A}{2bc \cos B \cos C},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin^2 B \cos^2 B + \sin^2 C \cos^2 C - \cos^2 A \sin^2 A}{2 \sin B \sin C \cos B \cos C},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin^2 2B + \sin^2 2C - \sin^2 2A}{2 \sin 2B \sin 2C}.$$

Naar man her bortskaffer A, faas ved Reduktion:

$$\cos \alpha = -\cos 2(B + C) = -\cos 2A, \quad \alpha = 180^0 - 2A.$$

Analoge Udtryk for de andre Vinkler. — Resultatet kan ogsaa faas af en Figur; thi hvis man forbinder Højdernes Fodpunkter i den Trekant, hvis Sider ere a, b, c, da faas en Trekant med Sider $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$.

3. I en Storcirkel i en Kugle med Radius $R = 10{,}138$ er indskreven en Trekant med Vinklerne $A = 52^0\, 40'\, 8''$ og $B = 59^0\, 25'$. Gjennem Trekantens Sider og vinkelret paa Storcirklens Plan lægges tre Planer. Man skal finde Rumfangene af de fire Dele, hvori disse tre Planer dele Kuglen, og Arealerne af de fem Dele, hvori Planerne dele Kuglens Overflade. Endelig søges Rumfanget af det tresidede Prisme, som til Sideflader har tre Tangentplaner til Kuglen med Røringspunkter i Vinkelspidserne af den ovennævnte i Storcirklen indskrevne Trekant, medens Grundfladerne ere to Tangentplaner til Kuglen parallele med den omtalte Storcirkels Plan.

Opløsning. Højderne i de tre Segmenter ere:

$$h_1 = 3.9901, \quad h_2 = 4.9799, \quad h_3 = 6.3261.$$

Rumfangene af Segmenterne ere:

$$V_1 = 440.54, \quad V_2 = 660.51, \quad V_3 = 1009.47.$$

Kuglens Rumfang er:

$$K = 4364.6.$$

Det mellem Planerne liggende Rum er

$$V_4 = 2254.1.$$

Kalotternes Arealer ere:

$$K_1 = 254.16, \quad K_2 = 317.21, \quad K_3 = 402.96.$$

Kuglefladens Areal er:

$$1291.55.$$

De to symmetriske Arealer blive hvert især:

$$158.61.$$

Prismets Rumfang er:

$$P = 2\, R^3\, tg\, A\, tg\, B\, tg\, C = 11394.2.$$

4. a) Man har givet Ligningerne i retvinklede Koordinater for en Parabel

$$y^2 = 4\,x,$$

og for en ret Linie

$$y = x - 1.$$

Man skal finde Ligningen for en Cirkel, som rører Parablens Ledelinie og gaar gjennem Skjæringspunkterne mellem Parablen og den givne, rette Linie. Hvorledes findes denne Cirkels to andre (reelle eller imaginære) Skjæringspunkter med Parablen?

b) Hvorledes beviser man (uden Regning, ved Benyttelse af bekjendte Sætninger), at naar man tegner en Korde gjennem Brændpunktet af en Parabel og over Korden som Diameter en Cirkel, da vil denne Cirkel røre Parablens Ledelinie.

Opløsning. a) Cirklens Ligning tages paa Formen:

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + c = 0.$$

Da Cirklen skal røre Ledelinien, kan c udtrykkes ved a og b:

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + b^2 - 1 - 2\,a = 0.$$

a og b bestemmes ved at erindre, at Cirklen skal gaa gjennem Skjæringspunkterne mellem den rette Linie og Parablen. Disse Skjæringspunkter ere:

$$x = 3 \pm 2\sqrt{2}, \quad y = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Man faar to Cirkler:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 22x + 12y + 13 = 0.$$

Ordinaterne til Skjæringspunkterne mellem den første Cirkel og Parablen bestemmes ved en Ligning af fjerde Grad, i hvilken to Rødder ere bekjendte. De andre to ere.

$$y = -2 \pm 2\sqrt{-2}, \text{ hvoraf } x = -1 \mp 2\sqrt{-2}.$$

Paa lignende Maade giver den anden Cirkel:

$$y = -2 \pm 2\sqrt{14}, \quad x = 15 \mp 2\sqrt{14}.$$

b) Naar man fra Kordens Endepunkter fælder vinkelrette Linier paa Ledelinien, faas et Trapez med to rette Vinkler. De to parallele Sider i dette ere lig med de to Stykker, hvori Korden deles af Brændpunktet, og Midterlinien er lig Cirklens Radius. Deraf følger Beviset med Lethed.

Almindelig Forberedelsesexamen og 4de Klasses Hovedexamen. Juni 1889.

Arithmetik.

1. A. udsætter 9000 Kr. til 2 pCt. halvaarlig; efter 4 Aars Forløb anbringer han $\frac{5}{8}$ af det, som Kapitalen er voxet til, til $2\frac{1}{2}$ pCt. halvaarlig, medens Resten bliver staaende til 2 pCt. halvaarlig. Hvor meget vil A. kunne hæve efter 8 Aars Forløb? Der forudsættes stadig Rente og Rentes Rente.

2. Find x af Ligningen

$$\sqrt{x - a^2} + \sqrt{x - b^2} = a - b;$$

specielt antages $a = b$.

3. Hvorledes bestemmes de tocifrede Tal, der have den Egenskab, at Forskjellen mellem Tallet og det Tal, der faas ved Ombytning af Cifrene, er et Tal med eet Ciffer? (dog ikke Nul).

Praktisk Regning.

1. 1080 Tdr. Hvede ere kjøbte for 11,21 Kr. pr. Td. og sælges efter Vægt. 1 Td. vejede ved Kjøbet 215 Pd., der ved at ligge svandt $1\frac{2}{3}$ pCt. Ved Salget vindes $8\frac{1}{3}$ pCt. paa Indkjøbsprisen. Find Salgsprisen for 100 Pd.

Hvis der var indkjøbt det dobbelte Antal Tdr., medens de øvrige Forhold vare som ovenfor, hvilken blev da Salgsprisen?

2. En cylinderformet Beholder, hvis Grundflades Radius r er 9,7538 Fod, er fyldt til en Højde $h = 3,4769$ Fod med Saltvand, hvis Vægtfylde er 1,1407 og som indeholder 7 pCt. Salt; hvor mange Pd. Salt er der i Opløsningen? Hvor mange pCt. Salt vil der blive, hvis der afdampes 55107,3 Pd. Vand? Cylinderens Kubikindhold er $\pi r^2 h$; $\pi = 3,1416$. 1 Kubikfod Vand vejer 61,987 Pd. (Logarithmer anvendes).

Geometri.

1. I en retvinklet Trekant er Hypotenusen $2a$ og den ene Vinkel 30^0. Tre Cirkler have deres Centrer i de tre Vinkelspidser og enhver af dem rører de to andre udvendig. Beregn Radierne og beregn det Areal, der ligger imellem de tre Cirkler.

2. En Trekant skal konstrueres; man kjender den ene Sides tilsvarende Højde og Median og véd, at denne Side er dobbelt saa stor som en af de andre Sider.

Alm. Forberedelsesexamen. Oktober 1889.

Arithmetik.

1. Find x, y og z af Ligningerne

$$5\,xy + 7\,yz - 9\,xz = 42;$$
$$4\,xy - 14\,yz + 18\,xz = 0;$$
$$-3\,xy + yz + 7\,xz = 50.$$

2. Find x af Ligningen

$$5^{2-x} + 5^{x+2} = 626.$$

Praktisk Regning.

1. A. skylder B. for 520 Kilo Varer til 2 Rmk. 20 Pf. pr. Kilo. Gjælden betales med Klæde, der er indkjøbt for 15 fr. 75 ct. pr. Meter, men leveres B. til en Pris, der er $5\frac{5}{8}$ pCt. højere end Indkjøbsprisen. Hvor mange danske Alen skal A. levere? 1 Rmk. = 100 Pf. = $88\frac{1}{5}$ Øre; 1 fr. = 100 ct. = 72 Øre; 1 Meter = $3\frac{1}{6}$ Fod.

2. En Metalcylinder med et indvendigt hult Rum har Vægtfylden 1, medens Metallets Vægtfylde er 9,275. Hvor stort er det indre Rum, naar for Cylindren

$$h = 16{,}615''; \; r = 4{,}124''; \; \pi = 3{,}1416?$$

Cylindrens Volumen er $\pi r^2 h$. Logarithmer anvendes.

Geometri.

1. I en regulær Femkant er Siden 1'. Hvor lang er Radius til den omskrevne Cirkel, og hvor lang er en af Diagonalerne? Roduddragningerne foretages ikke, men Resultaterne skulle bringes til den simplest mulige Form.

2. I en regulær Femkant trækkes to Diagonaler, der skjære hinanden; bevis, at det største Stykke af den ene Diagonal er lig Femkantsiden, og udled af Figuren (uden Hjælpelinier) en Proportion, hvis Led ere en af Diagonalerne og dens Stykker.

3. En retvinklet Trekant skal konstrueres, idet Højden paa Hypotenusen og den omskrevne Cirkels Radius ere givne.

De lærde Skolers Afgangsexamen. Juni 1889.

Arithmetik.

1. Først bevises følgende Sætninger, hvor p betegner et Primtal:

a) Største fælles Maal for $x^p - 1$ og $x^n - 1$ (n positiv, hel og $< p$) er $x - 1$.

b) Er α en af Rødderne (Roden 1 undtagen) i $x^p - 1 = 0$, da ere

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \; . \; . \; . \; . \; . \; \alpha^p$$

alle Rødderne.

Derpaa søges Summen af alle Røddernes m'te Potenser (m positiv, hel).

Opl. 1 a) Søger man paa sædvanlig Maade st. f. F., blive Divisorerne alle af samme Form som de givne Udtryk, og Exponenterne blive netop de Divisorer, som man faar, naar man søger st. f. Maal for n og p. Da nu p og n ere indbyrdes primiske, maa $x - 1$ blive den sidst brugte Divisor.

Sætningen bevises ogsaa let ved Betragtning af de to Størrelsers komplexe Faktorer.

b) Er a Rod, da er $a^p = 1$, altsaa ogsaa $a^{rp} = 1$ eller $(a^r)^p = 1$, der viser, at a^r er Rod. $a, a^2 \ldots a^p$ ere altsaa Rødder, og man har derved alle Rødderne, hvis de alle ere forskjellige; dette maa de være, thi af $a^r = a^s$ vilde følge (r tænkes $> s$) $a^{r-s} - 1 = 0$, $(r - s < p)$, hvad der strider mod den første Sætning.

For den søgte Sum faar man

$$a^m + a^{2m} + a^{3m} + \ldots\ldots + a^{pm} = a^m \frac{1 - a^{mp}}{1 - a^m}.$$

Da nu $a^{mp} = 1$, er Summen Nul i alle Tilfælde, hvor ikke tillige $a^m = 1$, ɔ: i alle Tilfælde, hvor m ikke er et Multiplum af p. Er m et Multiplum af p, bliver ethvert Led i Rækken lig 1 og Summen derfor p.

2. I et Spil, hvor der trækkes Rødt eller Sort, holder en Spiller stadig paa Sort; hans første Indsats er 1, og han gjør sin Indsats 1 større, hver Gang han taber, 1 mindre, hver Gang han vinder. Rødt er hvert Øjeblik under hele Spillet kommet hyppigst, og naar Spilleren standser, er Rødt kommet m Gange, Sort n Gange (hvor $m > n$). Bevis, at Spillerens Gevinst eller Tab er uafhængig af den Orden, i hvilken de to Farver ere udtrukne (dog med den ovenfor angivne Indskrænkning) og angiv Størrelsen af Gevinsten eller Tabet.

Opl. Har Spilleren i et Spil vundet n, bliver hans næste Indsats $n - 1$, og taber han denne, er Resultatet af de to Spil en Gevinst af 1. Havde han i det første af Spillene tabt n, blev hans næste Indsats $n + 1$ og, hvis han nu vinder, den samlede Gevinst ogsaa 1. Da saaledes for to paa hinanden følgende Spil, ved hvilke der trækkes en Gang rødt og en Gang sort, Farvernes Orden er ligegyldig, maa den i det hele taget være ligegyldig. Vi kunne derfor antage, at der først trækkes m Gange rødt, derpaa n Gange Sort; der tabes da

$$1 + 2 + 3 \ldots m = \frac{m(m + 1)}{2}$$

og vindes

$$m+1+m+m-1+\ldots+m+2-n=\frac{(2m+3-n)n}{2},$$

Gevinsten er altsaa

$$\frac{3n-m-(m-n)^2}{2}.$$

Beregningsopgave.

1. En Person betaler i 21 Aar ved Begyndelsen af hvert Aar en Sum x og opnaar derved, at han i de følgende 10 Aar, ved Slutningen af hvert Aar, kan hæve 1200 Kr. Renten er $3\frac{3}{4}$ pCt. p. a. Find x.

2. Bevis, at man for en hvilken som helst Trekant har

$$\frac{b-2a\cos C}{a\sin C}+\frac{a-2c\cos B}{c\sin B}+\frac{c-2b\cos A}{b\sin A}=0.$$

Opl. Udtrykket omskrives til

$$\frac{\sin B-2\sin A\cos C}{\sin A\sin C}+\frac{\sin A-2\sin C\cos B}{\sin C\sin B}+\frac{\sin C-2\sin B\cos A}{\sin B\sin A};$$

de to første have Summen

$$\frac{\sin^2 B+\sin^2 A-2\sin A\sin(B+C)}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin A\sin B\sin C}.$$

Den dobbelte Sum af alle tre Udtryk er derfor

$$\frac{\sin^2 B-\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B+\sin^2 A-\sin^2 C}{\sin A\sin B\sin C}=0.$$

Geometri.

1. To Cirkler med Radierne R og r skjære hinanden under Vinklen v (Tangenternes Vinkel i et af Skjæringspunkterne). Hvor stor er den krumme Overflade, som det Stykke af Cirklernes fælles Tangent, der ligger mellem Røringspunkterne, beskriver, naar den hele Figur drejer sig en Gang rundt om Centerlinien?

2. Ved hvilken Ligning bestemmes Retningskoefficienterne for Normalerne til de to Tangenter, som kunne trækkes fra et givet Punkt til en Ellipse, og hvilket bliver dette Punkts geometriske Sted, naar de to Tangenter skulle være parallele med et Par konjugerede Diametre?

Opl. Tangentens Ligning er

$$x \cos a + y \sin a = \pm \sqrt{a^2 \cos^2 a + b^2 \sin^2 a},$$

der, naar (x, y) er et givet Punkt, bestemmer Retningskoefficienterne for Normalerne til de to derfra dragne Tangenter ved

$$(y^2 - b^2) tg^2 a + 2xy\, tg\, a + x^2 - a^2 = 0.$$

Skulle de to Normaler være parallele med et Par konjugerede Diametre, maa man have

$$\frac{x^2 - a^2}{y^2 - b^2} = -\frac{b^2}{a^2},$$

saa at det søgte geometriske Sted er Ellipsen

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^4 + b^4.$$

3. I en spidsvinklet Trekant deler en Højde Siden a i Stykkerne a_1 og a_2, Vinklen A i A_1 og A_2. Hvorledes konstrueres Trekanten, naar Højden, $a_1 - a_2$ og $A_1 - A_2$ ere givne.

Opl. Bøjes den ene lille Trekant om Højden, faar man en Trekant, i hvilken man kjender Siden $a_1 - a_2$, den modstaaende Vinkel $A_1 - A_2$ og Højden, som let konstrueres.

Projektionstegning.

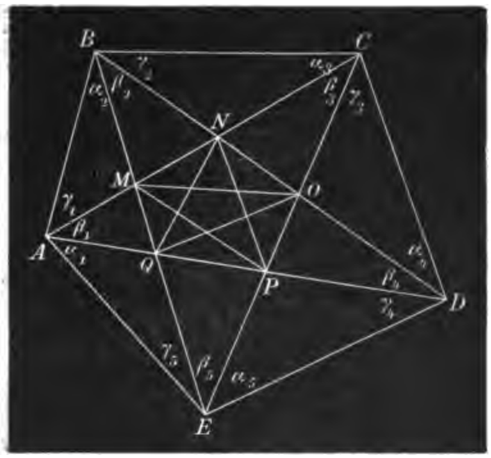
Fire lige store Kugler ligge saaledes, at enhver af dem rører de tre andre, de tre hvile paa den vandrette Plan, medens de forøvrigt ikke indtage nogen særlig simpel Stilling i Forhold til Projektionsplanerne. Tegn Projektionerne og bestem den øverste Kugles Røringspunkt med en af de Planer, som røre denne og to andre af Kuglerne.

LØSNING AF OPGAVERNE 413, 567, 552 OG 568.

413. Bestem den mest almindelige Femkant, hvis Diagonaler begrænse en anden dermed ligedannet Femkant.

(Julius Petersen).

Lad Femkant $ABCDE$ være ligedannet med den Femkant, som dannes af dens Diagonaler. Ere Femkanterne ligedannede i samme Omløbsretning, ere 5 Tilfælde mulige, hvilke maa betragtes hver for sig.



I. $ABCDE \sim MNOPQ$. I dette Tilfælde er

$$\angle ABQ = \angle ANQ = \alpha_2,$$

saa at Firkant $ABNQ$ er indskrivelig; man faar da af

$$\angle MAQ = MBN$$
$$\beta_1 = \beta_2,$$

og af de analoge Udtryk

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta;$$

af $\angle MQN = \angle MAB$ følger $\gamma_5 = \gamma_1$, saa at

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma;$$

endvidere er $\angle BMC = \alpha_2 + \gamma_1 = \beta_3 + \beta_5$, altsaa

$$\alpha_2 = 2\beta - \gamma,$$

saa at
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5.$$

Heraf følger atter, at $\triangle ABC \sim \triangle BCD \ldots \sim \triangle EAD$, hvoraf

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \cdots = \frac{EA}{AB} = \frac{AB + \ldots EA}{BC + \ldots AB} = 1.$$

Da altsaa saavel Femkantens Sider som Vinkler ere ligestore, er Femkanten regulær.

II. $ABCDE \sim NOPQM$.

Man faar af $\angle ONM = \angle NBA + \angle BAN$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_1.$$

altsaa ved de analoge Udtryk

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_3 + \beta_3 = \alpha_4 + \beta_4 = \alpha_5 + \beta_5,$$

og, da $\angle NQP = \alpha_4 + \beta_4$, bliver $\angle NQP = \angle NBA$, saa at Firkant $ABNQ$ er indskrivelig. Da er

$$\beta_1 = \beta_2, \ \alpha_2 = \alpha_1, \ \gamma_1 = \gamma_4,$$

hvorpaa som før bevises, at Femkanten er regulær.

III. $ABCDE \sim OPQMN$.

Af $\angle MOP = \angle OCM + \angle CMO$ følger

$$\beta_1 + \gamma_1 = \beta_3 + \gamma_4,$$

og af dette og de analoge Udtryk faar man

$$\gamma_1 - \beta_3 = \gamma_2 - \beta_4 = \gamma_3 - \beta_5 = \gamma_4 - \beta_1 = \gamma_5 - \beta_2 = x;$$

af $\angle QON = \angle OQD + \angle ODQ$ følger

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_3 + \beta_4,$$

hvorpaa udledes

$$\alpha_1 - \beta_4 = \alpha_2 - \beta_5 = \alpha_3 - \beta_1 = \alpha_4 - \beta_2 = \alpha_5 - \beta_3 = y;$$

endvidere er $\quad \angle BMC = \alpha_2 + \gamma_1 = \beta_3 + \beta_5,$

altsaa $\quad \beta_5 + y + \beta_3 + x = \beta_3 + \beta_5,$

$$y = -x.$$

Vi ville nu antage, at x er positiv. Den fjerde Vinkelspids B_1 i Parallelogrammet $ABCB_1$ vil da falde i Trekanten CPD. Skjærer en Parallel med BM gjennem B_1 Linien PN i B_2, maa dette Punkt falde i Forlængelsen af PN, idet

$$\angle PNO = \gamma_5 \text{ er større end } \angle PB_2O = \beta_2,$$

hvoraf atter følger, at B_1B_2 skjærer AC i et Punkt M_1 beliggende i NC, og da $CM_1 = AM$, følger heraf

$$CN > AM.$$

Var x negativ, fik man

$$AM > CN.$$

Nu er $\quad \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sin \alpha_3}{\sin \gamma_1}, \ \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{\sin \alpha_4}{\sin \gamma_2} \cdots \dfrac{AB}{CA} = \dfrac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma_5}.$

Multipliceres disse Ligninger, faar man ved Indførelse af

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma_1} = \frac{BM}{AM} \text{ og de analoge}$$

$$\frac{CN}{AM} \cdot \frac{DO}{BN} \cdot \frac{EP}{CO} \cdot \frac{AQ}{DP} \cdot \frac{BM}{EQ} = 1.$$

Er x positiv eller negativ, bliver imidlertid, som bevist, hver af Brøkerne henholdsvis større eller mindre end 1, hvilket er umuligt, da Produktet af Brøkerne er 1. Man har altsaa $x = 0$.

Heraf følger $BC \neq MO \neq AD$, saa at

$$\frac{MO}{AP} = \frac{BC}{BC + AQ},$$

og da $MO = PD$ og $BC = AP$, faar man

$$\overline{AP}^2 = PD \,.\, AD,$$

saa at PQ deler AD i Stykker med samme Forhold som de tilsvarende Stykker i en regulær Femkant. Heraf følger, at naar AED er en Parallelprojektion af den tilsvarende Trekant i en regulær Femkant, vil denne netop projiceres i Femkanten $ABCDE$.

Femkanten $ABCDE$ er altsaa Parallelprojektion af en regulær Femkant.

IV. $ABCDE \sim PQMNO$.

Da $\angle OPM = \angle EAM = \alpha_1 + \beta_1$, bliver Firkant $AEPM$ indskrivelig, hvoraf følger

$$\alpha_1 = \alpha_3, \; \beta_1 = \beta_5, \; \gamma_5 = \gamma_1.$$

Som i I. indses da, at Femkanten er regulær.

V. $ABCDE \sim QMNOP$.

Da $\angle NQM = \angle MAB = \gamma$, bliver Firkant $AQNB$ indskrivelig, hvorpaa som i I. indses, at Femkanten er regulær.

Tilbage haves det Tilfælde, at Femkanterne ere ligedannede i modsat Omløbsretning, altsaa

VI. $ABCDE \sim MQPON$.

Da $\angle ABQ = \angle BQN = \alpha_2$, faar man $AB \neq NQ$ og endvidere

$$\angle BAN = \angle ANQ, \text{ saa at } \gamma_1 = \gamma_5.$$

Heraf følger atter $AE \neq MP$, og da faar man af

$$\angle EAP = \angle APM, \text{ at } \alpha_1 = \alpha_3.$$

Nu bliver $BC \neq MO$, og, da $CD \neq NP$, faar man endelig $DE \neq OQ$.

Da $\angle BAM = \angle AEB$, er

$$\overline{AB}^2 = BM \,.\, BE \text{ og analogt}$$

$$\overline{CD}^2 = CO \,.\, CE,$$

hvoraf, da $\frac{BE}{CE} = \frac{MB}{CO}$, og paa Grund af Femkanternes Ligedannethed

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MQ}{OP},$$

man faar $$\frac{MQ}{OP} = \frac{BM}{CO},$$

saa at $$BC \mp MO \mp QP.$$

Af Parallelismen følger nu $AP = QD$ og

$$\angle MAP = \angle ACB = \angle MPA,$$

saa at $$AM = MP \text{ og analogt } QO = OD.$$

Trekanterne AMP og QOD ere da kongruente, hvoraf atter følger

$$AC \mp QO \mp DE \text{ og } BD \mp MP \mp AE,$$

og, idet $$\triangle AMP \sim \triangle AED,\ AE = ED.$$

Man faar nu let

$$AB \mp OP,\ CD \mp MQ, \text{ samt } AB = CD.$$

Femkanten er, som i III., Parallelprojektion af en regulær Femkant, kun at specielt to paa hinanden følgende Sider ere ligestore.

Den mest almindelige Femkant, hvis Diagonaler begrænse en anden dermed ligedannet Femkant, er altsaa en Parallelprojektion af en regulær Femkant.

(A. S. Bang).

567 (517 bis)[1]. Lad de 3 Keglesnits Ligninger være $A=0, B=0$ og $aA+bB=0$, hvor $A(x) \equiv \sum_{i,j=1,2,3} a_{ij}x_ix_j$, $B(x) \equiv \sum_{i,j=1,2,3} b_{ij}x_ix_j$; lad Δ_a betegne A's Diskriminant og Δ_b B's, samt, idet ξ_1, ξ_2, ξ_3 betegne Liniekoordinater, α betyde $- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix}$ og β den tilsvarende Funktion for B; da ville Røringspunkterne for Tangenterne fra et Punkt (y) til Keglesnittet A have Tangentligningen $\alpha \,.\, A(y) = \Delta_a \,.\, (\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3)^2$ og Røringspunkterne for Tangenterne fra (y) til β have Ligningen

$$\beta \,.\, B(y) = \Delta_b\,(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3)^2;$$

disse Ligninger findes ved at udtrykke, at de Tangenter, der gaa igjennem Skjæringspunktet for Polaren til (y) og Linien (ξ) og som

[1]) Anden Løsning, jfr. S. 189.

altsaa have Liniekoordinater af Formen $\eta_1 + \lambda\xi_1, \eta_2 + \lambda\xi_2, \eta_3 + \lambda\xi_3$, hvor (η) er Polaren, falde sammen, eller hvad der er det samme, at den Ligning, man faar til Bestemmelse af λ, naar $\eta + \lambda\xi$ indsættes for ξ i α eller β, har lige Rødder; af disse to Ligninger i Forening med $aA(y) + bB(y) = 0$ udledes, at Linier, der gaa gjennem et Punkt af hver af disse Par Røringspunkter, tilfredsstille Ligningen $b \,.\, a\Delta_b + a\beta \,.\, \Delta_a = 0$, hvorved Sætningen er bevist. Havde man for Punktparrene sat dobbeltrørende Keglesnit

$$\alpha \,.\, A(y) = \mu\Delta_a (\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3)^2$$

og

$$\beta \,.\, B(y) = \nu\Delta_b (\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3)^2,$$

saa var man, hvis Forholdet $\frac{\mu}{\nu}$ var konstant, kommen til en lignende Sætning; μ og ν ville her være visse absolute Invarianter; Betydningen af μ f. Ex. vil være, at μ's Værdi bestemmer Dobbeltforholdet mellem de 4 Punkter, hvori en vilkaarlig Linie gjennem (y) skjærer (A) og dets dobbeltrørende Keglesnit; hvis f. Ex. dette og det tilsvarende Forhold ved (B) ere lige store, ville de to Keglesnit, der bestemmes ved ovenstaaende Ligninger, have Fællestangenter, der berøre Keglesnittet $b \,.\, a \,.\, \Delta_b + a \,.\, \beta \,.\, \Delta_a = 0$.

(E. C. Valentiner).

552. At konstruere en Trekant af en Vinkel, Summen af de indesluttende Sider og Højden paa den tredie.

(S. A. Christensen).

Afsættes den givne Vinkels Toppunkt A og den Linie, hvorpaa den modstaaende Side BC ligger, og drejes Linien den bekjendte Vinkel A om Punktet, kommer den i Stillingen B_1C_1, hvor B_1 ligger i Forlængelsen af AC. Lad O være Skjæringspunkt mellem BC og B_1C_1. Afstanden fra A til Midtpunktet D af B_1C er da lig den halve givne Sum, og D er altsaa Skjæringspunkt mellem en bekjendt Cirkel om A og den Hyperbel, der indeholder Midtpunkterne af de Stykker, Linierne OB og OB_1 afskjære paa Linier gjennem A. Denne Hyperbel har Toppunkterne O og A, Asymptoter parallele med OB og OB_1. For at bestemme D søges Skjæringspunktet D_1 mellem en Asymptote og en Linie gjennem D vinkelret paa Axen OA. Skjærer denne Axen i P, har man

$$AD_1^2 = AD^2 + PD_1^2 - PD^2 = AD^2 + b^2,$$

hvor b er Hyperblens anden Halvaxe. D_1 og D bestemmes altsaa let, og den søgte Trekant kan da tegnes.

Den bekjendte Opgave: Gjennem et Punkt af en given Vinkels Halveringslinie at drage en Linie, hvoraf Vinklens Ben (L og M) afskjære et givet Stykke, løses paa en lignende Maade. Drejes nemlig L 180^0 om Punktet hen i Stillingen L_1, vil Midtpunktet af det Stykke, der afskjæres mellem L_1 og M, have en bekjendt Afstand fra det givne Punkt. (N. Madsen).

568. Hvilken Tversum har et m-cifret Tal gjennemsnitlig? (A. S. Bang).

Antallet af existerende m-cifrede Tal er $10^{m-1} . 9$. Det længst tilvenstre staaende Ziffer i Tallene antager efterhaanden alle Værdier fra 1 . . . 9, hvis Sum er 45, og Summen af de længst tilvenstre staaende Cifre i alle m-cifrede Tal bliver altsaa $10^{m-1} . 45$. De paa næste Plads staaende Cifre gjennemløbe alle Værdier fra 0 . . . 9, hvis Sum atter er 45, og Summen af de paa denne Plads staaende Cifre i alle m-cifrede Tal er $10^{m-2} . 9 . 45$, ligeledes de paa 3die Plads staaende Cifre o. s. v. $(m - 1)$ Gange.

Summen (s) af alle m-cifrede Tals Tversum:
$s = 45.10^{m-1} (1 + (m - 1) 10^{-1} . 9)$ og den gjennemsnitlige Tversum (S)

$$S = 45 . 10^{m-1} \frac{(1 + (m - 1) 10^{-1} . 9)}{9 . 10^{m-1}} = \frac{1 + 9m}{2}.$$

Ex. $m = 1, 2, 3, 4$ o. s. v. give $S = 5, 9.5, 14, 18.5$ o. s. v.

(A. Vedel).

LITERATUR.

Poul la Cour: Historisk Mathematik. Kjøbenhavn 1888, P. G. Philipsens Forlag.

Det er mig kjært at kunne udtale mig om denne Bog, og jeg maa da først bringe Forfatteren en Tak for det store Arbejde, som

han har nedlagt deri. Der er imidlertid en Mangel ved Bogen, som den ikke kan andet end lide under, den har villet give for meget paa en Gang. Forfatteren vil nemlig samtidig give en Haandbog for Lærere og for Elever.

Det, at den tager Sigte paa Elever uden Foruddannelse i Mathematik, gjør, at det betydelige historiske Stof overvælder det mathematiske Stof, som dog for Eleven maa være det vigtigste. Det vil let gaa Eleven saaledes, at hans Viden bliver for usikker, saa det vil være uhyre vanskeligt at anvende Sætningerne paa Opgaver, hvor det dog kommer an paa, at han kan Sætningerne korrekt og gjennem den exakte Bevisførelse faar en fuldstændig Forstaaelse af Sætningernes Betydning. Eleven vil let fristes til at følge den famlende Vej i Anvendelsen og deraf følgende ukorrekte Bevisførelse, som er nødvendig, naar han skal lære Mathematiken ad historisk Vej, hvor de famlende Forsøg ere meget vigtige, maaske de vigtigste.

Det, som Forfatteren omtaler, at lade Eleven lære noget af Opfinderens Glæde, er baade meget smukt og tiltalende, men er for den dygtige Lærer ikke noget nyt. Desuden synes mig Bogen ikke ret at faa dette frem, thi Indholdet maa nærmest gjennemgaas som Foredrag, da der ikke kan være Tale om at paalægge Eleven den Udgift at anskaffe en saa kostbar Bog foruden de sædvanlige Lærebøger, og da vil let Eleven nøjes med at være den modtagende og ikke den ydende. Dette kan godt opnaas gjennem de sædvanlige Lærebøger, det vil vist nemlig være gaaet de fleste Lærere saaledes, at de ved simplere Sætninger selv lade Eleverne finde dem og udvikle dem, hvor Tiden tillader det; desuden have Eleverne ogsaa denne Glæde ved Løsningen af Opgaver.

En Fordel vilde Eleven naturligvis have ved den historiske Methode, nemlig den, at han i Geometrien lærer at se paa en Figur, men det kan ganske vist naas ad kortere Vej, og jeg tror med samme Udbytte i Henseende til at give Eleven Interesse for Geometrien. Nægtes kan det jo ikke, at Prof. Jul. Petersens Plangeometri med al dens Fortrinlighed savner en passende Indledning. Det har derfor været Skik ved den Skole, hvor jeg underviser,

forud at give en Oversigt over Hovedformerne i Rummet i en Time ugentlig, det første Aar efter Figurer tilhørende Skolen, jeg har imidlertid forandret det derhen, at Eleven selv kommer til at eje og lave disse Figurer efter et af mig udgivet „Hjælpemiddel til den første Geometriundervisning, Plan I, II". Ved at Eleverne nu selv i Timerne sammensætte disse Figurer og i en Stilebog nedskrive Kjendemærkerne for dem efter, hvad de selv se, faa Eleverne Interesse for Faget og en Evne til at se, som kommer dem meget til Gode i 2den Klasse, hvilket har vist sig derved, at jeg med Lethed naar, hvad jeg tidligere kun med Vanskelighed naaede i den Klasse.

Det kan ikke nægtes, at jeg har stor Lyst til at faa Lejlighed til at gjøre et Forsøg med denne Bog i 1ste Klasse, men jeg nærer kun ringe Haab om et heldigt Udfald af et saadant Forsøg. At naturligvis ældre Begyndere kunne have mere Udbytte deraf, skal jeg ikke nægte, men ogsaa hos dem tror jeg, at Exaktheden vil mangle, og selv om man senere benyttede en almindelig Lærebog, vilde det først lærte vist sidde for godt fast, ikke at tale om, at forskjellige Bevisførelser vilde virke generende, men naturligvis mest for Skoleelever.

Med Hensyn til den anden Side af Bogen, nemlig Bogen betragtet som Haandbog for Lærere, er det meget heldigt, at den er fremkommen. Det er nemlig saa, at mange Lærere kun kjende ganske lidt til Mathematikens Historie, og af Erfaring ved jeg, hvor megen Glæde Eleverne have af at erfare et og andet om dette Punkt, og at der er Tid til at give en Del temmelig fuldstændige Oplysninger derom, og lettere vil dette opnaas, naar man har en god samlet Fremstilling som her. Vi Mathematiklærere bør derfor være Forfatteren taknemlige for Bogen.

Dens første Afsnit om Tal og Regning er noget særdeles smukt og fornøjeligt, kun maaske noget for udførligt, og sikkert er det, at det vil more Eleven, og at Læreren i de tilføjede Exempler vil have en hensigtsmæssig lille Samling Opgaver, hvorved han kan prøve, om Eleven nu har forstaaet hans Fortællinger og Forklaringer, og selv vil han deri have en Vejledning til at oplyse det forklarede med passende Exempler; men dog tror jeg, at det

er et Afsnit, som man bør gjemme til den mere modne Alder, for at Eleven kan faa det fulde Udbytte deraf.

I Læren om Tal og Talsystemer viser Forfatteren os, hvorledes Talsystemerne opbygges hos de forskjellige af Oldtidens Folkeslag, og det er paa dette Punkt, at Vidtløftigheden og Uoverskueligheden for Eleven fremkommer. Derpaa lærer han Regninger med hele Tal og Brøker, særlig naturligvis Decimalbrøker, hvis Fremstilling er anlagt for Eleverne som i en Lærebog.

I den anden Del, den geometriske, holder han sig til Grækerne, naturligvis med en Indledning om Ægypterne som det Folk, hvorfra Grækerne fik Begyndelsesgrundene til deres Viden, og dette indledende Afsnit — indtil Pythagoras — giver en Række spredte Sætninger hentede fra de forskjellige Afsnit af Geometrien, Sætninger, som kunde være kjendte uden noget egentlig mathematisk Grundlag, og som rimeligvis tør siges at være det første Grundlag for Mathematiken.

Pythagoras bliver nu den første større Personlighed, der kommer til at beskjæftige Historikeren, og Skildringen af hans Person og Betydning er af stor Interesse, navnlig da saa meget kan føres tilbage til Pythagoræerne, nemlig den pythagoræiske Læresætning, de regelmæssige Legemer, Begyndelsen til de irrationale Størrelser og Proportionslæren, der giver Anledning til Behandlingen af geometrisk Regning. Af megen Interesse, men liggende udenfor det mathematiske Begyndelsespensum, er Afsnittet om Perspektiv, ligesom ogsaa den samlede Oversigt over Behandlingen af Opgaven om Cirklens Kvadratur, der sikkert vil interessere Eleverne, naar de efter de almindelige Lærebøger naa saa vidt. Det er jo indlysende, at Forfatteren ikke kan følge den sædvanlige Ordning af Stoffet. Dette er en af Grundene til, at Bogen beregnet paa Elever ikke er saa heldig, ikke at Manglen ligger i, at Forfatteren ikke følger Lærebøgerne, men deri, at Eleven kommer til at mangle Overblik over Stoffet, idet det springer saa vidt omkring, hvor Eleven uden at være meget moden ikke kan holde sammen paa det læste.

Efter en glimrende Udvikling af Platons og Platonikernes

Betydning, hvor han kaster et Blik paa Keglesnitslærens Oprindelse, gaar Forfatteren over til Euklid som den, der afslutter den elementære Mathematiks Udvikling ved sine Elementer, men her vilde det være meget nyttigt for Eleven og sikkert meget fornøjeligt tillige, om Forfatteren i Stedet for med enkelte Sætninger at paavise Euklids System havde medtaget første Bog af Elementerne, om det end for Læreren kan være tilstrækkeligt med de enkelte Sætninger, men dog maa det erindres, at mange Lærere ikke have let Adgang til en Euklidoversættelse, navnlig da vist mange næppe kunne tilstrækkeligt Latin.

Hermed afsluttes Behandlingen af Geometrien, hvorpaa man i 3die Afsnit kommer til Bogstavregningen.

I dette Afsnit indføres Symbolerne for den elementære Mathematik og Regning med dem; men her er Forfatterens Fremstilling ligesom noget famlende, han nødes til at gaa noget uhistorisk frem, ligesom det ikke kan andet end virke mere generende her end i den geometriske Del, at Beviserne erstattes med almindelige Bemærkninger. Det er naturligvis unødvendigt at sige, at det er Inderne, som her spille Hovedrollen, ligesom ogsaa i Ligningernes Behandling, medens Afsnittet om „Kvadrat og Kvadratrod“ er temmelig uhistorisk og lægger Hovedvægten paa Bogens Anvendelse for Elever. Til Slutning tages Ligninger af 2den Grad efter Indernes Methode, uden at Forfatteren paa dette Sted nævner Grækernes Løsning.

Endnu et skal jeg gjøre et Par Bemærkninger om, nemlig om Forfatterens Forsøg paa at rense Sproget for de latinske, tekniske Udtryk, som dog have faaet Indfødsret i Sproget. Allerede tidligere er et saadant Forsøg gjort, nemlig af Dybvad (omtalt her i Tidsskriftet for 1885), men at det mislykkedes laa i, at det kom for tidligt, og dette maa vel siges at komme for sent, i det hele ser jeg ingen Ulykke i, at saadanne tekniske Udtryk bibeholdes i den latinske Form.

Som en Fortsættelse af dette Arbejde vilde en Fremstilling af Trigonometrien have megen Interesse, og vilde tillige efter den nuværende Skoleordning kunne have Mulighed for at komme frem

her, idet Astronomiundervisningen for den sproglig-historiske Afdeling savner et trigonometrisk Grundlag, og da den græske Trigonometri udvikledes af Astronomien, vilde en saadan Fremstilling kunne faa sin store Betydning for Undervisningen, og paa dette Felt synes jeg, at en Sammenkjædning af de to Formaal at skrive for Lærer og Elev lettere maa kunne iværksættes.

S. A. Christensen.

C. Juel: Elementerne af Infinitesimalregningen. Kjøbenhavn 1890. Andr. Fred. Høst & Søns Forlag. (120 S.).

Forfatteren har i dette lille Arbejde villet give en Lærebog i Begyndelsesgrundene af Differential- og Integralregningen, saa elementær, at den uden Vanskelighed kan læses af Elever i de lærde Skolers øverste Mathematikklasser og andre paa tilsvarende Standpunkt. En saadan Lærebog har selvfølgelig ikke til Hensigt at give en dybere Indsigt i de forskjellige Synspunkter, under hvilke Infinitesimalregningen kan betragtes; derimod bliver der i fortrinlig Grad at lægge Vægt paa, at der iagttages en passende Begrænsning af Æmnet, og at der paa ethvert Punkt benyttes den simpleste og lettest tilgængelige Fremstilling. Det synes mig, at Forfatteren gjennemgaaende har været heldig. Ved at indskrænke sig til Betragtningen af saadanne Funktioner af en enkelt uafhængig variabel, som geometrisk kunne fremstilles ved kontinuerte Kurver, og ved stadig at benytte en saadan Fremstilling, har han opnaaet at kunne medtage alt det, hvorpaa det ved den første Undervisning kommer an, altsaa først og fremmest det rent tekniske, og dog levere en indenfor den valgte Begrænsning fuldt exakt Fremstilling, uden at fristes til at lægge Skjul paa de Vanskeligheder, en saadan i Almindelighed medfører. Bogen deler sig i tre Hovedafsnit: 1) Differentialregning, 2) Integralregning og 3) Rækkeudviklinger; det sidste Afsnit er dog meget kortfattet. — I de to første medtages foruden selve Principerne de vigtigste Anvendelser paa geometriske og fysiske Problemer, uden at man dog gaar ud over Omraader, som knytte sig nær til, hvad der læres i Elementerne. I en stor Mængde ofte fortræffelig valgte Opgaver, som ere vedføjede de enkelte Stykker, medtages der imidlertid ikke saa lidt mere af

specielle Anvendelser. Der er ingen Tvivl om, at en Bog som den foreliggende vil kunne gjøre megen Nytte. For Studerende vil den være en fortræffelig Indledning til Orientering i Stoffet, og for de mange, som uden at ville gjøre et indgaaende Studium af Mathematiken som Videnskab, kunne ønske at tilegne sig Grundtrækkene af Infinitesimalregningen, vil den være særdeles passende. Dog kan jeg særlig med Hensyn til de sidst nævnte ikke undlade at gjøre en almindelig Bemærkning. Forf. har haft den fortræffelige Tanke at begynde Integralregningen med et fra Fermat hentet Exempel paa en direkte Bestemmelse af et Integral ved Summation, hvilken han meget rigtig selv fremhæver som den almindeligste Fremgangsmaade. Jeg kunde have ønsket, at han var gaaet noget udførligere ind paa denne Side af Sagen, paa dens Sammenhæng saavel med de i Elementerne forekommende Integrationsmethoder som med rent numeriske Integrationer, hvis simpleste Former af praktiske Grunde burde have været medtagne. Det maa nemlig erindres, at for den mindre øvede er Integration af sammensatte Udtryk en vanskelig Operation, og hvor det gjælder om Bestemmelsen af et specielt numerisk Resultat, hvad der i Anvendelserne i Praxis meget hyppig vil være Tilfældet, vil det maaske ofte være ham lettere at regne sig til et tilstrækkelig tilnærmet Resultat, end at udvikle den exakte Formel, selv om denne kan findes. Jo mere Eleven er udsat for, at de i selve Lærebogen angivne Midler ikke ere ham tilstrækkelige, desto vigtigere er det aabenbart, at han er i Stand til at hjælpe sig ved en tilnærmet Beregning, og denne kan jo ovenikjøbet altid udføres. — Jeg tror, at lidt større Udførlighed paa dette Punkt vilde have forøget Bogens praktiske Nytte i ikke ringe Grad, men ogsaa i dens nuværende Skikkelse er det et Arbejde, som jeg kun kan anbefale paa det bedste.

J. P. Gram.

VED AFSLUTNINGEN.

Tidsskrift for Mathematik, som herved afslutter sin Tilværelse, har efter vore Forhold opnaaet en ret anselig Levetid. Det grundedes i 1859 af daværende Observator, Dr. phil. Schjellerup og cand. math. Camillo Tychsen, senere Dr. phil. og Direktør i Livsforsikringsanstalten, af hvilke dog den første allerede efter et Aars Forløb udtraadte af Redaktionen. Tidsskriftet vandt, som man vil se af Subskriptionsfortegnelsen i 1ste Bind, strax en meget betydelig Tilslutning blandt ældre og yngre Mathematikere. Det udkom i de første 6 Aar som Maanedskrift under Navn af Mathematisk Tidsskrift paa Karl Schønbergs Forlag. Med 7de Aargang begyndte en ny Række, Tidsskriftet antog da det Navn, det indtil nu har baaret, samtidig overgik det til Otto Schwartz's Forlag. De øvrige Ændringer, der foretoges med Tidsskriftet, nemlig at det kom til at udgaa hveranden Maaned med 2 Ark i Stedet for med 1 Ark maanedlig, samt at der i Texten blev foretaget en Adskillelse mellem den elementære Del og den højere Mathematik, vare mere formelle end reelle Forandringer; paa Tidsskriftets Karakter havde de ingen Indflydelse. Efter Afslutningen af 2den Række skiftede Tidsskriftet Redaktør, idet det overtoges af daværende Docent, Dr. H. G. Zeuthen, som har forestaaet Redaktionen indtil nu, for den 5te Rækkes Vedkommende i Forening med Dr. phil. J. P. Gram. De tre sidste Rækker ere udgivne paa E. Jespersens Forlag.

Ved at gjennemgaa de udkomne 30 Aargange af Tidsskriftet vil man snart se, at det trods adskillige Forskjelligheder dog i det hele og store helt igjennem bærer et ganske bestemt ejendommeligt Præg. Det indeholder Bidrag saavel af ganske elementær som af rent videnskabelig Natur, men ligesom man — fraregnet Examensopgaverne — kun meget sjelden vil finde Opgaver eller Artikler, som henvende sig til Elever, som ikke have naaet det Standpunkt, der nu betegnes ved Alm. Forberedelsesexamen, saaledes er der ogsaa kun meget faa, hvis Forstaaelse kræver andre Forudsætninger

end dem, som enhver polyteknisk Kandidat sidder inde med. Disse Grænser betegne tilstrækkelig Tidsskriftets Karakter. Det har vel ikke indeholdt mange Artikler, som have ført Videnskaben i det hele fremad, nogle har der dog været, og ikke faa, som vilde have været en Pryd ogsaa for et rent videnskabeligt Tidsskrift; men desto flere Bidrag har det indeholdt, som have været vel skikkede til at vække Interessen for Mathematiken i Almindelighed og til at fuldstændiggjøre Læsernes Kundskaber paa forskjellige Omraader.

Der er særlig et enkelt Felt, hvor dette gjør sig gjældende. Det er den synthetiske Geometri, og mere specielt Konstruktionsopgaverne. Det er ret interessant at lægge Mærke til, at den første Afhandling, som Tidsskriftet indeholdt, bar Titelen: Den geometriske Analyse anvendt paa Konstruktionsopgaver, af Adolph Steen, og at Resten af 1ste Hefte optoges af Opgaver og Forespørgsler af Ludv. Oppermann, vedrørende samme Æmne. Og atter og atter er man kommen tilbage til dette, saavel i de større Artikler som i de stillede Opgaver, og det tør sikkert hævdes, at intet andet Tidsskrift har bragt en saadan Række af smukke geometriske Konstruktionsopgaver med tilhørende ofte meget elegante Løsninger som dette. Overhovedet have Opgaverne i dette Tidsskrift spillet en betydelig Rolle, og det maa fremhæves, at den allerstørste Del af disse Opgaver ere originale, mange af dem virkelig interessante, kun meget faa bære Trivialitetens Præg.

Tidsskriftet afspejler, paa Opgavernes som paa andre Omraader, ganske godt den Udvikling, som i den Tid, det har bestaaet, er foregaaet her i Landet med Hensyn til det mathematiske Studium. Man ser denne Udvikling paa Examensopgaverne, og man ser den paa de indsendte Artikler. Alle nulevende danske Mathematikere have dette Tidsskrift at takke, fordi det har baaret deres første spæde Forsøg ud i Verden paa et Tidspunkt, da de vanskelig kunde have fundet Plads i noget af de større Tidsskrifter i Udlandet. Tidsskriftet har derved tillige haft en opdragende Betydning, som ikke bør undervurderes. Især i de senere Aar have ogsaa ikke faa svenske og norske, særlig af de yngre Mathematikere, givet Bidrag til det, men i Hovedsagen maa det ellers siges, at

det er en bestemt lille Kreds af danske Mathematikere, som have baaret Tidsskriftet oppe, saa at sige fra Begyndelsen til Slutningen. Dette har været dets Styrke, men ogsaa dets Svaghed.

Det kan nemlig ikke være andet, end at enhver videnskabelig Forfatter, efterhaanden som hans Udvikling skrider frem, uvilkaarlig kommer til at stille større Fordringer til sine egne Publikationer. Det er dog ikke blot for at belære andre, han skriver, men ligesaa meget for at tilfredsstille en vis personlig Trang, og en ældre Kandidat vil neppe føle sig opfordret til at offentliggjøre saadanne Meddelelser, som han som ung Student har været meget glad ved at fremsætte. Det er derfor ret naturligt, at den Ungdommelighed, som fra først af udmærkede en stor Del af de indsendte Artikler, og som ofte i høj Grad bidrog til at gjøre dem tiltrækkende, efterhaanden har veget Pladsen for en mere videnskabelig Form, der samtidig stillede strengere Fordringer, saavel til Læsere som Forfattere. Og denne Tendens har atter skadet selve Tidsskriftet, for saa vidt som en Del af de yngre Kræfter have ment at burde følge i samme Spor, medens andre have holdt sig for meget tilbage, og Tilgangen af passende Bidrag derved i det hele taget har været saa begrænset, at det til sine Tider har været vanskeligt at skaffe det fornødne Stof tilveje.

Paa dette Forhold har det ikke været muligt at raade Bod uden at bryde med Traditionen. Hvor meget Redaktionen end maa beklage, at et Tidsskrift, der har gjort saa megen Nytte som dette, skal gaa ind, saa er det dog efterhaanden bleven klart, at dette vilde være det fornuftigste for at give yngre Kræfter Lejlighed til at forsøge at rekonstruere det paa en ny Basis. Til denne Bestemmelse bidrog yderligere den Omstændighed, at der efter Indførelsen af almindelig Forberedelsesexamen er kommen et stort Publikum af Lærere rundt om i Landet, for hvem det nuværende Tidsskrift ikke vilde passe. Da der allerede i nogle Aar har bestaaet et elementært Tidsskrift, som særlig søgte sine Læsere i disse Kredse, laa det nær at søge dette udviklet saaledes, at det ogsaa kunde medtage den højere Undervisning i sit Program. Det er dette Forsøg, som nu vil blive gjort med „Nyt Tidsskrift for Mathematik“, som fra 1890 vil udkomme under Redaktion af d'Hrr. cand. mag. C. T. Foldberg og Dr. phil. C. Juel, og vi ønske vore yngre Kolleger meget Held med dette Foretagende, som vi opfordre det gamle Tidsskrifts Venner til at støtte efter Evne.

Vi skulle til Slutning bringe en varm Tak til alle dem, der i den forløbne Tid have støttet dette Tidsskrift, til Læserne, som trofast have fulgt det igjennem Tidernes Løb, og til alle de Medarbejdere i Ind- og Udland, som ved deres Arbejder have bidraget til at grundlægge og befæste dets Anseelse.

Kjøbenhavn i Dcbr. 1889.

Redaktionen.

Fra Nytaar 1890 vil der under Redaktion af cand. mag. P. T. Foldberg og dr. phil. C. Juel udgaa et

„Nyt Tidsskrift for Mathematik",

der vil blive inddelt i to Afdelinger. Afdeling **A** vil være en Fortsættelse af »Maanedsskrift for den elementære Mathematik« og vil blive redigeret ganske i samme Stil som dette, medens Afdeling **B** vil tjene den højere mathematiske Undervisning og ved Siden deraf som det tidligere »Tidsskrift for Mathematik« bringe mindre Afhandlinger fra den højere Mathematiks Omraade af ældre og yngere Forfattere. Afdeling **A** udgaar med to Numre Kvartalet i alt 10 Ark om Aaret, Afdeling **B** med et Nummer Kvartalet i alt 6 Ark om Aaret. Hver Afdeling danner et Hele for sig.

Der kan abonneres paa Afdeling **A** alene eller paa hele Tidsskriftet, men ikke paa **B** alene. Abonnement tegnes **kun** paa Posthusene i Skandinavien eller direkte hos Redaktionen, Gammeltoftsgade 10, Kjøbenhavn K., da Tidsskriftet ikke vil komme i Boghandelen; man bedes derved udtrykkelig bestille enten »Nyt Tidsskrift for Mathematik« eller »Nyt Tidsskrift for Mathematik Afdeling **A**«.

Abonnementsprisen for »Nyt Tidsskrift for Mathematik« er 5½ Kr. pr. Aargang, for »Nyt Tidsskrift for Mathematik Afd. **A**« 3 Kr. pr. Aargang. Hertil kommer ved Abonnement paa Posthusene Postgebyrerne, der i Kjøbenhavn ere henholdsvis 28 Øre og 16 Øre, i det øvrige Danmark 50 Øre og 28 Øre, i Sverig-Norge 55 Øre og 30 Øre. Ved direkte Abonnement beregnes Forsendelsesomkostningerne til 10 Øre; dette kan kun tegnes, naar samtidig Beløbet henholdsvis 5 Kr. 60 Øre eller 3 Kr. 10 Øre indsendes.

De første Numre af begge Afdelinger ville udkomme i Januar 1890. Bidrag hertil, af elementært Indhold til Afd. **A**'s Nr. 1, fra den højere Mathematiks Omraade til Afdeling **B**'s Nr. 1 bedes indsendte til Redaktionen eller til en af Redaktørerne, af hvilke dr. phil. C. Juel bor Reventlowsgade 10, Kjøbenhavn V., cand. mag. P. T. Foldberg Gammeltoftsgade 10, Kjøbenhavn K.

Prøvenumre tilsendes efter Rekvisition i Løbet af Januar.

Acta Mathematica.

Zeitschrift herausgegeben von

Journal rédigé par

G. Mittag-Leffler.

På tidskriften kan prenumereras i hvarje bokhandel i de nordiska länderna, Tyskland och Frankrike.

INDHOLD.

Hermed følger en Indbydelse til Subskription paa **„Nyt Tidsskrift for Mathematik“.**